Exercice 1.
Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels positifs et K_α le sous-ensemble suivant de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$:

$$\{(u_n)_{n\geq 0} \in \ell^2 : |u_n| \leq \alpha_n\}.$$

Montrer que K_α est compact si et seulement si α appartient à $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Exercice 2. Soient E et F deux espaces topologiques. On suppose que F est compact.

1. Montrer que la projection $p : E \times F \to E$ est fermée (autrement dit, l'image d'un fermé de $E \times F$ par p est un fermé de E).
2. Soit f une application de E dans F. On suppose que le graphe de f est fermé dans $E \times F$ muni de la topologie produit. Montrer que f est continue.

Exercice 3.
On considère un espace métrique compact (E, d) et une application $f : E \to E$.

1. Si f préserve la distance ($d(f(x), f(y)) = d(x, y)$) montrer que f est bijective.
2. Si f vérifie $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ dès que x et y sont des points distincts de E, montrer que f admet un unique point fixe dans E.
3. Si f est continue et vérifie $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$ alors f est bijective et $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$. On pourra commencer par montrer que si x est un point de E et $n(k)$ telle que $f^{n(k)}(x)$ a une limite, alors $f^{n(k+1)-n(k)}(x)$ converge vers x, puis le faire simultanément pour deux points x et y.

Exercice 4.
Soit (K, d) un espace métrique compact.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ montrer qu'il existe une partie finie F de K telle que :

$$\forall x \in K, \exists y \in F, d(x, y) < 1/k$$

2. À l'aide de ce qui précède, montrer que K est séparable. On notera désormais $D = \{y_n, n \in \mathbb{N}\}$ une partie dénombrable dense.
3. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall (x, y) \in K^2$, $d(x, y) \leq \delta$.

On pose :

$$\phi : \begin{pmatrix} K & \to & [0, \delta]^{\mathbb{N}} \\ x & \mapsto & (d(x, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \end{pmatrix}.$$

4. Montrer que ϕ est injective.
5. On munit $[0, \delta]^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit. Rappeler pourquoi cet espace est compact et montrer que l'application ϕ est continue.
6. Montrer que tout espace métrique compact est homéomorphe à une partie fermée de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.

Exercice 5. Un espace compact non-métrisable
Soit $E = [0,1]^{]0,1[}$ l'espace des applications de $]0,1[$ dans $[0,1]$, muni de la topologie produit.

1. Montrer que E est compact.

Nous allons montrer que E n'est pas métrisable. À chaque suite finie $r_0 = 0 < r_1 < \ldots < r_n = 1$ de rationnels de $[0,1]$ on associe une fonction continue $f : [0,1] \to [0,1]$: f prend la valeur 0 en tous les points r_i, la valeur 1 aux points $\frac{r_{i+1}-r_i}{2}$ $(0 \leq i \leq n-1)$ et est affine entre ces points (faire un dessin). En considérant la restriction de f à $]0,1[$ nous obtenons un élément de E. Soit F l'ensemble de toutes les fonctions ainsi obtenues (lorsque l'on fait varier les r_i et l'entier n).

2. Montrer que F est dénombrable et dense dans E. En déduire que tout élément de E est valeur d'adhérence de la suite obtenue en indexant les éléments de F par les entiers.
3. Montrer que très peu d'éléments de E sont limite d'une suite extraite de cette suite,
   (a) Par un argument de cardinal
   (b) Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue
   (c) Par le théorème de Baire.

Exercice 6. Grassmanniennes
On note $G(k,n)$ l'espace des sous-espaces vectoriels de dimension k de R^n (c'est la *variété de Grassmann* ou encore *grassmannienne*). Munir $G(k,n)$ d'une topologie naturelle et montrer que c'est un espace compact.

Exercice 7.
Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^n$. On considère les trois espaces d'applications suivants : $\mathcal{C}(K,\mathbb{R}^n)$ (applications continues de K dans $\mathbb{R}^n$), $\mathcal{C}(K,K)$ (applications continues de K dans lui-même) et $G(K)$ le sous-espace de $\mathcal{C}(K,K)$ formé des isométries. On munit ces trois espaces de la topologie de la convergence uniforme (définie, par exemple, par la distance suivante : $d(f,g) = \sup_{x\in K} ||f(x)-g(x)||$).

Montrer que $G(K)$ est fermé dans $\mathcal{C}(K,K)$, que $\mathcal{C}(K,K)$ est fermé dans $\mathcal{C}(K,\mathbb{R}^n)$, et que $G(K)$ est compact.