ENS Lyon, L3 Mathématiques fondamentales, 1er semestre 2009-2010

Partiel de Topologie

9 novembre 2010, 13h30-15h30

L'usage des notes de cours est autorisé, à l'exclusion de tous autres documents. Les deux exercices sont indépendants.

1 Soit X un espace topologique. On dit qu'une partie $A \subset X$ est *localement fermée* si tout point $a \in A$ a un voisinage V dans X tel que $A \cap V$ est fermé dans V.

(i) On suppose $A \subset X$ fermée. Est-elle localement fermée ? (si oui, le démontrer ; si non, donner un contre-exemple).

(ii) Même question si A est ouverte.

(iii) Même question si $A = U \cap F$, avec $U \subset X$ ouvert et $F \subset X$ fermé.

(iv) Même question si $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$.

(v) On suppose que $A \subset X$ est localement fermée. Montrer qu'il existe $U \subset X$ ouvert et $F \subset X$ fermé tels que $A = U \cap F$.

2 Soit (X, d) un espace métrique. On note $\mathcal{F}_b(X)$ l'ensemble des fermés bornés non vides de X.

(i) Si $F_0, F_1 \in \mathcal{F}_b(X)$, on définit $h(F_0, F_1) = \sup_{x \in F_0} d(x, F_1)$, puis la *distance de Hausdorff*

$$d_H^X(F_0, F_1) = d_H(F_0, F_1) := \max(h(F_0, F_1), h(F_1, F_0)).$$

Montrer que c'est une distance sur $\mathcal{F}_b(X)$. Dans la suite, on considèrera $\mathcal{F}_b(X)$ comme un espace métrique ou un espace topologique.

(ii) On suppose $(X, d) = (\mathbb{R}^2, d_{can})$ (la distance euclidienne canonique). Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}_b(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des cercles (de rayon > 0). Montrer que $\mathcal{C}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^3$.

(iii) On suppose X précompact. Montrer que $\mathcal{F}_b(X)$ est précompact.

(iv) On suppose X complet. Montrer que $\mathcal{F}_b(X)$ est complet.

Indication. Si (F_n) est une suite de Cauchy, considérer $A_n = \bigcup_{m \geq n} F_m$ et $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{A}_n$.

(v) On suppose X compact. Montrer que $\mathcal{F}_b(X)$ est compact.

Soient (X_0, d_0) et (X_1, d_1) deux espaces métriques compacts non vides. On définit la *distance de Gromov-Hausdorff*

$$(*) \qquad d_{GH}(X_0, X_1) = \inf_{i_0, i_1} d_H^Z(i_0(X_0), i_1(X_1)) \ ,$$

où l'inf est pris sur tous les plongements isométriques i_0 et i_1 de X_0 et X_1 dans un espace métrique (Z, d_Z) quelconque. (S'il n'y a pas de tel plongement, $d_{GH}(X_0, X_1) = +\infty$; en fait il y en a toujours, cf la question (vii)).

(vi) Montrer que l'inf dans $(*)$ est inchangé si l'on se restreint au cas où $Z = i_0(X_0) \cup i_1(X_1)$. On note $\mathcal{F}(X_0, X_1)$ l'ensemble des fonctions $f : X_0 \times X_1 \to \mathbb{R}_+$ telles que

$$\begin{aligned} |f(x_0,x_1) - f(x_0',x_1')| &\leq d_0(x_0,x_0') + d_1(x_1,x_1') \\ f(x_0,x_1) + f(x_0',x_1) &\geq d_0(x_0,x_0') \\ f(x_0,x_1) + f(x_0,x_1') &\geq d_1(x_1,x_1'). \end{aligned}$$

Donner les grandes lignes d'une preuve que

$$(**) \qquad d_{GH}(X_0,X_1) = \inf_{f \in \mathcal{F}(X_0,X_1)} \max\big(\max_{x_0 \in X_0} \min_{x_1 \in X_1} f(x_0,x_1), \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_0 \in X_0} f(x_0,x_1)\big).$$

(Une preuve complète demanderait des vérifications faciles mais longues).

Indication. Considérer $f(x_0,x_1) = d_Z(i_0(x_0), i_1(x_1))$.

(vii) Montrer que $d_H(X_0,X_1) \leq \frac{1}{2}\max(\mathrm{diam}(X_0), \mathrm{diam}(X_1))$. (Cette question peut être traitée indépendamment de la précédente).

(viii) Montrer que l'inf dans $(**)$ (donc dans $(*)$) est atteint, puis que

$$d_H(X_0,X_1) = 0 \Leftrightarrow X_0 \text{ est isométrique à } X_1.$$

(ix) Montrer :

$$\begin{aligned} d_{GH}(X_0,X_1) &= d_{GH}(X_1,X_0) \\ d_{GH}(X_0,X_2) &\leq d_{GH}(X_0,X_1) + d_{GH}(X_1,X_2). \end{aligned}$$

Remarque. On voit que d_{GH} est une distance sur «l'ensemble de tous les espaces métriques compacts modulo homéomorphisme». On peut donner un sens à cet ensemble, par exemple en prouvant que tout métrique compact se plonge dans $[0,1]^{\mathbb{N}}$.