Exercice 1. Nombres transcendants

1. Prouver que l'ensemble de polynômes $\mathbb{Z}(X)$ est dénombrable ainsi que l'ensemble A des racines de ces polynômes.
2. Construire (par un procédé diagonal) le développement décimal d'un nombre transcendant.

Exercice 2. Montrer que les géodésiques de $\mathbb{R}^n$ euclidien sont les droites. Commencer par celles de $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Décrire les géodésiques de $(\mathbb{R}^2, \| \, . \, \|_\infty)$.

Exercice 4. Distance de Hausdorff.
Soit (E, δ) un espace métrique non vide. Soit X,Y deux fermés bornés, non vides de E. On définit la distance de Hausdorff d sur E par :

$$d(X, Y) = max \left(\sup_{x \in X} \delta(x, Y), \sup_{y \in Y} \delta(y, X) \right)$$

Montrer que muni de cette fonction l'espace des ensembles compact non vides de E, $(K(E), d)$, est un espace métrique. Que dire si E est complet ? compact ?

Exercice 5. Courbe de Von Koch.
Définition wikipédia :
On peut la créer à partir d'un segment de droite, en modifiant récursivement chaque segment de droite de la façon suivante :

– on divise le segment de droite en trois segments de longueurs égales,
– on construit un triangle équilatéral ayant pour base le segment médian de la première étape,
– on supprime le segment de droite qui était la base du triangle de la deuxième étape.

Montrer que la longueur d'une telle courbe est infinie. Prouver alors que la distance de Hausdorff ne contient pas d'information sur le périmètre.

Exercice 6. Combien de topologies peut-on mettre sur un ensemble à trois éléments ?

Exercice 7. On dit qu'un espace topologique E est *séparé* si pour tous $x \neq y$ dans E, il existe des ouverts V_1, V_2 disjoints tels que $x \in V_1$ et $y \in V_2$.

1. Montrer que tout espace métrique est séparé.
2. Construire une topologie τ sur $\mathbb{R}^2$ (autre que la topologie grossière !) telle que $(\mathbb{R}^2, \tau)$ ne soit pas séparé.

Exercice 8. Montrer par un exemple que la complétude est une notion métrique et non topologique.

Exercice 9. Déterminez l'ensemble A' des points d'accumulation dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble $A = \{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}, p, q \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 10. Soit E l'ensemble des applications f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telles que $|f(z)| \leq \frac{1}{1+|z|}$, $(\forall z \in \mathbb{C})$.

1. On définit $d(f,g) = \sup\{|f(z) - g(z)|, z \in \mathbb{C}\}$. Montrez que d est une distance sur E. Montrez que (E,d) est complet.
2. On définit $d'(f,g) = \sup\{(1+|z|)|f(z) - g(z)|, z \in \mathbb{C}\}$. Montrez que d' est une distance sur E. Montrez que (E,d') est complet.
3. Ces deux distances sont-elles topologiquement équivalentes ?