Exercice 1 Soit (X, d) un espace métrique.

1. Montrer que X est complet si et seulement si pour toute suite décroissante de fermés non vides $(F_n)_{n\geq 0}$ dont le diamètre tend vers 0, il existe $x \in X$ tel que $\bigcap_{n\geq 0} F_n = \{x\}$.
2. On suppose que X est complet. Soit (Y, d') un espace métrique et $f : X \to Y$ une fonction continue. Soit $(F_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de fermés non vides dont le diamètre tend vers 0. Montrer que $f(\bigcap_{n\geq 0} F_n) = \bigcap_{n\geq 0} f(F_n)$.

Exercice 2 Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques. Soit $A \subset X$ une partie dense.

1. Soient deux fonctions $f_1, f_2 : X \to Y$ continues telles que $f_1(x) = f_2(x)$ pour tout $x \in A$. Montrer que $f_1 = f_2$.
2. On suppose (Y, d') complet. Soit $f : A \to Y$ une fonction uniformément continue. Montrer qu'il existe une unique fonction continue $g : X \to Y$ telle que $g_{/A} = f$. Montrer que g est uniformément continue.

Exercice 3 Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

1. On suppose que E est complet. Soit $\sum_{n\geq 0} x_n$ une série absolument convergente dans E (i.e. $\sum_{n\geq 0} \|x_n\| < \infty$), montrer que $\sum_{n\geq 0} x_n$ est convergente.
2. Réciproquement, on suppose que toute série absolument convergente dans E est convergente. Montrer que E est complet. (indication : montrer que dans un espace métrique une suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence est convergente)

Exercice 4 Soit E l'ensemble des applications f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telles que $|f(z)| \leq \frac{1}{1+|z|}$, $(\forall z \in \mathbb{C})$.

1. On définit $d(f, g) = \sup\{|f(z) - g(z)|, z \in \mathbb{C}\}$. Montrer que d est une distance sur E. Montrer que (E, d) est complet.
2. On définit $d'(f, g) = \sup\{(1 + |z|)|f(z) - g(z)|, z \in \mathbb{C}\}$. Montrer que d' est une distance sur E. Montrer que (E, d') est complet.
3. Ces deux distances sont-elles topologiquement équivalentes ?

Exercice 5 Pour $x \in]0, 1[$, on pose $d(x) := \min(x, 1 - x)$. Considérons l'espace $(]0, 1[, \delta)$, où $\delta(x, y) := |\frac{1}{d(x)} - \frac{1}{d(y)}| + |x - y|$.

1. Montrer que $(]0, 1[, |.|)$ n'est pas complet.
2. Montrer que δ est une distance sur $]0, 1[$.
3. Montrer que δ définit les mêmes ouverts que la valeur absolue.
4. Montrer que $(]0, 1[, \delta)$ est complet.

* *Cas général* : Soit (X, d) complet, et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des ouverts de X. Il existe une distance δ sur $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ qui induit la même topologie que d et pour laquelle $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est complet.

Exercice 6
1. Soit (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une isométrie. Montrer que f est surjective.
2. *Cas général* : Soit (X, d) un espace métrique. Toute isométrie de X dans X est-elle nécessairement surjective ?

Exercice 7 Soit K un corps normé complet. On veut montrer que toutes les normes sur K^n sont équivalentes sans utiliser d'argument de compacité.

1. Montrer le résultat quand $n = 1$.
2. Montrer qu'il suffit de montrer que n'importe quelle norme est équivalente à la norme infinie (pour la base canonique de K^n) notée $\|.\|_\infty$.
3. Soit N une norme sur K^n, montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $x \in K^n$, on a $N(x) < C\|x\|_\infty$.
4. Montrer le résultat par récurrence sur n.
(*Indication :* On pourra raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe une suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que $\|x_m\|_\infty = 1$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, et $N(x_m) \overset{m\to\infty}{\to} 0$.)

Exercice 8 Soient $(X, d), (Y, d')$ deux espaces métriques, et $f : X \to Y$ une application. Nous disons que f est fermée si elle envoie les parties fermées sur des parties fermées. Nous disons que f est propre si f est continue et si pour tout espace métrique (Z, d''), l'application

$$\begin{pmatrix} f \times Id_Z = f_Z : & X \times Z & \to & Y \times Z \\ & (x, z) & \mapsto & (f(x), z) \end{pmatrix}$$

est fermée.

1. Montrer qu'une application propre est fermée.

2. Supposons $f : X \to Y$ continue. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) f est propre.
   (b) f est fermée et pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ est compact.
   (c) Pour toute partie compacte B de Y, $f^{-1}(B)$ est compacte.

Exercice 9 Soit (X, d) un espace métrique. On définit une fonction δ sur l'ensemble E des parties compactes de X par :

$$\delta(K, K') = \mathrm{Inf}\{\epsilon > 0 | K \subset \mathcal{V}_\epsilon(K') \text{ et } K' \subset \mathcal{V}_\epsilon(K)\},$$

où $\mathcal{V}_\epsilon(K) := \{x \in X, d(x, K) < \epsilon\}$.

1. Montrer que δ est une distance sur E.

2. Montrer que si (X,d) complet, alors (E,δ) complet.
3. Montrer que si (X,d) compact, alors (E,δ) compact.

4* Soit $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que l'application

$$\begin{cases} g: & E \to \mathbb{R} \\ & K \mapsto max\{f(x), x \in K\} \end{cases}$$

est continue.
Indication : On pourra montrer que g est semi-continue inférieurement et semi-continue supérieurement.

Calcul différentiel

Exercice 10 Déterminer les différentielles des fonctions suivantes (ici $p \in \mathbb{N}$) :

$$\begin{cases} GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}) \\ A \mapsto A^{-1} \end{cases}, \begin{cases} M_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto \det(A) \end{cases}, \begin{cases} M_{n,n}(\mathbb{R}) \to M_{n,n}(\mathbb{R}) \\ A \mapsto A^p \end{cases}, \begin{cases} M_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto Tr(A^p) \end{cases}.$$

Exercice 11 Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, a un point de E, et $U = \{x \in E,\ 0 < ||x-a|| < R\}$. Soit f une application différentiable de U dans F telle que pour tout x dans $U, ||Df(x)|| \leq k$.

1. Montrer que si E est de dimension > 1 on a :

$$\forall (x,y) \in U^2,\ ||f(x)-f(y)|| \leq k||x-y||.$$

2. Montrer que f admet une limite α au point a.

3. On suppose que $Df(x)$ admet une limite $L \in \mathcal{L}(E,E)$ en a, et on prolonge f en posant $f(a) = \alpha$. Montrer que f est différentiable en a, et que $Df(a) = L$. L'application f ainsi prolongée est donc C^1.
Indication : Considérer l'application définie par $g(x) = f(x) - L(x-a)$.

Exercice 12 Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et F un evn de dimension finie. Soit $f : [a,b] \longrightarrow F$ une application continue sur $[a,b]$ et admettant sur $]a,b[$ une dérivée telle que $||f'(u)|| \leq 1$ pour tout u. On suppose que $||f(b)-f(a)|| = b-a$.

1. Montrer que $||f(v)-f(u)|| = v-u$ pour tout couple $(u,v) \in [a,b]^2$ avec $u \leq v$. En déduire que $||f'(u)|| = 1$ pour tout u.

2. On suppose de plus que la norme de F provient d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Montrer que
$$f(u) = f(a) + \frac{u-a}{b-a}(f(b) - f(a)).$$
Indication : Exprimer $\langle f(b) - f(a), f(u) - f(a) \rangle$ à l'aide de la norme.

Exercice 13 Soit E un evn et $g : E \longrightarrow E$ une application différentiable telle que :

$$\exists k \in]0,1[, \quad \forall x \in E, \quad ||Dg(x)|| \leq k$$

1. Montrer que $f = Id + g$ est injective et que l'image réciproque par f d'une partie bornée de E est bornée.

2. Montrer que le système d'équations
$$x = \frac{1}{2}\sin(x+y), \ y = \frac{1}{2}\cos(x-y)$$
admet au plus une solution.
Indication : Utiliser la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.
3. Donner un exemple de fonction $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, avec Ω ouvert connexe du plan, tel qu'il existe $a, b \in \Omega$ tels que
$$||f(b) - f(a)|| > ||b-a|| \sup_{x \in \Omega} ||Df(x)||.$$