Calcul différentiel

Exercice 1 Calcul.

1. Calculer la différentielle d'une application constante, linéaire et quadratique.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ différentiable. Montrer que les fonctions suivantes sont différentiables et déterminer leur différentielle :
$$u(x) = f(x, -x), \quad g(x, y) = f(y, x).$$
3. soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ toutes deux C^k. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ montrer que si pour tout $i \leq k$, $\mathrm{d}_x^i f = 0$ alors $\mathrm{d}_x^i gof = 0$. Que dire si pour tout $i \leq k$, $\mathrm{d}_{f(x)}^i g = 0$?
4. Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, $f_A(t) = e^{tA}$. Montrer que $f'_A(t) = Ae^{tA} = e^{tA}A$.
5. Montrer que $\forall t \in \forall A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \quad \det(e^{tA}) = e^{t\mathrm{Trace}(A)}$.

Exercice 2 Soit f fonction de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, soit $a \in \mathbb{R}^2$ on suppose que $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ existent en a et que de plus $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ existe et est continue sur un voisinage de a. Montrer que f est différentiable en a.

Exercice 3 Formule d'Euler Soit E, F deux espaces de Banach de dimension finie, soit $f : E \to F$, différentiable sur E telle que : $\forall x \in E$, $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(tx) = t^n f(x)$ Montrer que $\mathrm{d}f_x(x) = nf(x)$. Montrer que pour $n = 2$ et si de plus f est C^2 alors f est quadratique.

Exercice 4 On se place dans $M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de Id tel que :

1. Pour $A \in \mathcal{U}$, il existe un unique $B \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $A = B^2$. On note $B = \sqrt{A}$.
2. l'application $\psi : \begin{cases} \mathcal{U} \to M_n(\mathbb{R}) \\ A \mapsto \sqrt{A} \end{cases}$ est C^1. Est-elle C^∞ ?

Exercice 5 Soit E l'espace des polynômes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, de degré au plus 47, muni de la norme de la convergence uniforme. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Montrer que l'application suivante est différentiable :
$$\Phi : \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_0^1 \phi(f(x))\mathrm{d}x \end{cases}.$$

L'application Φ est-elle de classe C^1 ?

Que peut on dire si on remplace E par l 'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ muni de la norme de la convergence uniforme ?

Exercice 6 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et prenant ses valeurs dans un evn E. Soit $a \in I$. On suppose que f est dérivable sur I, et que $f''(a)$ existe. Montrer que la fonction g définie sur $I \times I$ par :

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} & \text{si} \quad x \neq y \\ f'(x) & \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

est différentiable au point (a,a) et que $\mathrm{d}g_{(a,a)}(h,k) = \frac{h+k}{2} f''(a)$.

Exercice 7 Soit $E = C^1([0,1], \mathbb{R}^n)$. Pour $f \in E$ on définit $||f|| = \sup |f| + \sup |f'|$. Montrer que $||.||$ est une norme sur E et que $(E, ||.||)$ est complet.

Exercice 8 Soit E un espace de banach de dimension finie, et B_r la boule fermé de centre 0 et de rayon r.

1. Soit $f : B_r \to E$, b contractante avec $b < 1$ et tel que $|f(0)| \leq r(1-b)$. Montrer que f admet un unique point fixe. Notons le x_1.
2. soit $g : B_r \to E$ tel que $||g - f||_\infty \leq c$, on suppose que g admet un point fixe x_2 montrer que $|x_2 - x_1| \leq \frac{c}{1-b}$.

Exercice 9 Soit $K : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ continue, tel que $||K||_\infty \leq C$. On fixe une fonction f de $[a,b] \to R$ continue et $r \leq \frac{1}{C(b-a)}$. Montrer qu'il existe une unique fonction g continue tel que $g(x) = f(x) + r \int_a^b K(y,x) g(y) \mathrm{d}y$.

Exercice 10 Soit f de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f' \geq c > 0$ et que $f(x+1) = f(x)+n$. Montrer qu'il existe une fonction continue $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\alpha(x+1) = \alpha(x)+1$ et tel que :

$$f(\alpha(x)) = \alpha(nx).$$

indication : Introduire l'inverse de f et chercher à appliquer un thérorème du point fixe.

Exercice 11 Différentielle de l'exponentielle de matrice

1. Déterminer la différentiabilité en 0 de l'application exp : $\begin{cases} M_{n,n}(\mathbb{R}) \to M_{n,n}(\mathbb{R}) \\ A \mapsto e^A \end{cases}$.
2. Soit $X(t)$ un chemin de matrices C^1 et $f(t,s) = e^{sX(t)}$. Calculer la dérivée de $g_t(s) = e^{-sX(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t,s)$. En déduire que $\frac{\partial f}{\partial t}(t,1) = \int_0^1 e^{(1-u)X(t)} X'(t) e^{uX(t)} \mathrm{d}u$.
3. Monter que $\mathrm{d}_A(exp)(H) = \int_0^1 e^{(1-u)A} H e^{uA} \mathrm{d}u$.
4. Soit $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel des matrices symétriques et $\mathcal{U}$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.
5. Montrer que $\mathcal{U}$ est un ouvert de S.

6. Montrer que pour $A \in \mathcal{U}$, il existe un unique $B \in \mathcal{U}$ tel que $A = B^2$. On note $B = \sqrt{A}$.
7. Montrer que $\psi : \begin{cases} \mathcal{U} \to \mathcal{U} \\ A \mapsto \sqrt{A} \end{cases}$ est différentiable.

Exercice 12 Fonctionnelles quadratiques Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.

Soit $J : \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}B(x,x) - L(x) \end{cases}$, avec B est une forme bilinéaire symétrique continue et L une forme linéaire continue.

1. Quelle équation vérifient les points critiques de J ?
2. Montrer que si E est un espace de Hilbert et que si il existe $\alpha > 0$ tel que $B(u,u) \geq \alpha \|u\|^2$, alors la fonctionnelle J admet un unique minimum.
   Indication : Soit x_n une suite telle que $\lim_{n \to \infty} J(x_n) = \inf_E J$. En utilisant le fait que $\frac{1}{2}B(x_n - x_m, x_n - x_m) = 2(J(x_n) + J(x_m)) - 4J(\frac{x_n + x_m}{2})$, montrer que cette suite est de Cauchy.
3. Montrer que si E est de dimension finie et que si $\lim_{\|x\| \to \infty} J(x) = +\infty$, alors J admet un unique minimum.
   Moindres carrés
4. Soient n points du plan (x_i, y_i) avec des x_i qui ne soient pas tous égaux entre eux. Montrer qu'il existe un unique $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\sum_{i=1}^n (\lambda x_i + \mu - y_i)^2$ soit minimal. La droite d'équation $y = \lambda x + \mu$ est appelé droite des moindres carrés.
5. Soient $x_1, x_2, \ldots x_m$ tels que $n+1$ d'entre eux soient 2 à 2 distincts.
   Montrer que la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R} \\ P \to \sum_{i=1}^m (P(x_i) - y_i)^2 \end{cases}$ admet un unique maximum.

Exercice 13 Extremas liés : cas d'une contrainte linéaire Soit E un espace de Banach de dimension finie.

Soit $(f_1, \ldots, f_p)$ une famille libre de formes linéaires continues et $g : E \to \mathbb{R}$ une fonction C^1.

1. On suppose qu'il existe x_0 tel que
$$g(x_0) = \inf_{f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_p(x) = 0} g(x).$$
   ,
   Montrer qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que :
$$Dg(x_0) = \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i$$
   Note : les λ_i sont appelés les multiplicateurs de Lagrange.

2. On suppose qu'il existe x_0 tel que

$$g(x_0) = \inf_{f_1(x)\leq 0, f_2(x)\leq 0 \dots, f_p(x)\leq 0} g(x).$$

Soit $I = \{1 \leq i \leq q | f_i(x) = 0\}$.
Montrer qu'il existe $\lambda_i, i \in I$ tels que :

$$Dg(x_0) = \sum_{i\in I} \lambda_i f_i$$

Montrer que de plus $\lambda_i \geq 0$.
Note : les λ_i sont appelés les multiplicateurs de Kuhn-Tucker.

Exercice 14 Équations d'Euler-Lagrange Soit $\mathcal{F} : \begin{cases} C_0^1([0,1], ||.||_\infty) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^1 l(x(t), x'(t), t) t \end{cases}$ avec l de classe C^1.

1. Montrer que f est C^1 et sa différentielle est :
$\mathrm{d}\mathcal{F}_x(h) = \int_0^1 h(t)\frac{\partial l}{\partial x} l(x(t), x'(t), t) + h'(t)\frac{\partial l}{\partial x'} l(x(t), x'(t), t)\mathrm{d}t$
2. Soit F continue sur un $[a, b]$ telle que pour h C^1 nulle aux bords, $\int_a^b F(x)h'(x)\mathrm{d}x = 0$.
Montrer que F est constante.
3. Soit x un point critique de $\mathcal{F}$.
Montrer que $t \mapsto \frac{\partial l}{\partial x'} l(x(t), x'(t), t)$ est de classe C^1. (On pourra introduire la primitive de $t \mapsto \frac{\partial l}{\partial x}(x(t), x'(t), t)$)
Montrer que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial l}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) + \frac{\partial l}{\partial x}(x(t), x'(t), t) = 0$$

4. On choisit $l(x, x', t) = x'^2 - x$.
Étudier les minima de $\mathcal{F}$.