ENS Lyon **TD 2** **19-20/09/2011**
Topologie

Exercice 1 Proche du cours.

1. Soit E un ensemble fini, F un ensemble dénombrable, montrer que $E \times F$ est dénombrable.
2. Soit f, g deux fonctions continues, montrer que gof est continue.
3. Montrer que dans un EVN l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même rayon.
4. Soit E un espace métrique, montrer que tout ouvert de E est une union de boules ouvertes. Que peut-on dire si E est de plus séparable.
5. Soit E un espace métrique séparable, soit $F \subset E$, montrer que F est séparable.
6. Soit E, F deux espaces métriques, donner trois métriques possibles pour $E \times F$.

Exercice 2 L'écriture décimale. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Un *développement décimal* de x est une suite d'entiers $\{n_0, n_1, \ldots\}$ où pour tout $k \geq 1$, $n_k \in \{0, \ldots, 9\}$, telle que la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n_k}{10^k}$$

converge vers x.

1. Soit n_0 le plus grand nombre entier tel que $n_0 \leq x$. Pour $k \geq 1$, on définit par récurrence n_k comme le plus grand nombre entier qui satisfait

   $$n_0 + \frac{n_1}{10} + \cdots + \frac{n_k}{10^k} \leq x \ .$$

   Pour tout $k \geq 1$, donner l'expression de n_k en fonction de n_{k-1} et x et vérifier que $\{n_0, n_1, \ldots\}$ est un développement décimal de x.

2. Montrer que tout x non décimal admet un unique développement décimal, qui est propre (c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \geq n /\ n_k \in \{0, \ldots, 8\}$).
3. Montrer que tout nombre décimal admet exactement deux écritures décimales.
4. Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
5. Montrer que si $D \subset \mathbb{R}$ est dénombrable alors $\mathbb{R} \setminus D$ est en bijection avec $\mathbb{R}$.

Exercice 3 Montrer que les ensembles suivant s'injectent dans $\mathbb{R}$:

1. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$
2. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
3. Les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Comme $\mathbb{R}$ s'injecte également dans ces ensembles on dit qu'ils ont la puissance du continue (même cardinal que $\mathbb{R}$). Soit E métrique séparable, montrer que E a au plus la puissance du continue. Quel est le cardinal de l'ensemble des parties finis de $\mathbb{N}$?

Exercice 4 Nombres transcendants.

1. Prouver que l'ensemble de polynômes $\mathbb{Z}[X]$ est dénombrable ainsi que l'ensemble A des racines de ces polynômes.
2. Construire (par un procédé diagonale) le développement décimal d'un nombre transcendant

Exercice 5 La Distance SNCF. On considère l'application $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}_+$ définie par $d(X, Y) = ||X - Y||_2$ si X et Y sont linéairement dépendant, $||X||_2 + ||Y||_2$ sinon.

1. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}^2$. Est-elle bornée ? Dérive-t-elle d'une norme ?
2. Soit $X = (1, 0)$, trouver les boules $B_d(X, 1), B_d(X, 2)$.
3. Montrer que l'application identitée de $(\mathbb{R}^2, d)$ dans $(\mathbb{R}^2, ||.||_2)$ est continue. Qu'en est-il de sa réciproque ?
4. Montrer que les translations de $(\mathbb{R}^2, d)$ dans lui même non triviales, ne sont pas continues.
5. Montrer que $(\mathbb{R}^2, d)$ n'est pas séparable.

Exercice 6

1. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérences d'une suite est fermé.
2. Soit (u_n) une suite réelle strictement croissante et $E = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que E est fermé dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.
3. Montrer que toute suite croissante majorée de nombres réels converge.
4. Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ continue. On suppose que la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ n'a qu'une seule valeur d'adhérence. Montrer qu'elle converge.
5. Déterminez l'ensemble A' des points d'accumulation dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble $A = \{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}, p, q \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 7 Soit f une fonction croissante sur $[0, 1]$. Montrer que les points de discontinuités f (points où f n'est pas continue) forment un ensemble dénombrable ou fini.

Exercice 8 Trouver une famille de fonctions dénombrable, dense, pour la norme sup, dans les fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, de $[0, 1]^p$ dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 9 Topologie p-adique. On dit qu'une norme sur un corps est ultramétrique si elle vérifie $|x + y| \leq \max(|x|, |y|)$.

1. Sur $\mathbb{Q}$ on définit la norme p-adique pour p un entier premier par $|p^v \frac{a}{b}|_p = p^{-v}$ si $p \nmid ab$. Montrer qu'il s'agit d'une norme ultramétrique.
2. Montrer que, sur un corps muni d'une norme ultramétrique complète, une série converge si et seulement si son terme général tend vers 0.

3. Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$ pour la topologie 2-adique sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 10 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone. On suppose $f(\mathbb{R})$ dense dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est continue.

Soient A et B deux parties dénombrables denses dans $\mathbb{R}$.

2. Construire (correctement) par récurrence une bijection (strictement) croissante φ de A dans B.
3. En utilisant l'ordre, montrer que φ se prolonge en une application $\bar{\varphi}$ strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $\bar{\varphi}$ est continue, bijective et que son application réciproque est continue.

Exercice 11 On considère l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ \frac{1}{|q|} \text{ si } x = \frac{p}{q} \text{ et } \mathrm{pgcd}(p,q) = 1 \end{cases} \end{cases}$.

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et discontinue sur le reste de l'ensemble.

Exercice 12 1. Qu'est-ce qu'une application continue $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$?

2. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue tel que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ induit une fonction continue de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$. Donner un exemple de fonction continue de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$ qui n'est pas la restriction d'une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
3. Les fonctions continues de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$ vérifient-elles le théorème des valeurs intermédiaires ?
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Si f est injective sur $\mathbb{Q}$, est-elle nécessairement injective sur $\mathbb{R}$? Et si elle est injective sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?