## Topologie

**Exercice 1** Soit $(X, d)$ un espace métrique compact. On veut redémontrer quelques propriétés du cours en utilisant la caractérisation des compacts par le théorème de Borel-Lebesgue et non par les valeurs d'adhérence des suites. Soit $(Y, \delta)$ un autre espace métrique, et $f : X \to Y$ continue.

1. Montrer que $f(X)$ est compact.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour tout $x \in X$, il existe $\eta_x > 0$ tel que pour tout $y, z \in B(x, \eta_x)$, on a $\delta(f(y), f(z)) < \varepsilon$. En déduire que $f$ est uniformément continue.
3. Faire la même chose pour d'autres résultats du cours.

**Exercice 2** Soit $(X, d)$ un espace métrique, et $(x_n)$ une suite d'éléments de $X$. On suppose que $x_n$ a une limite $x$. Montrer que l'ensemble $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est compact.

**Exercice 3** Soit $(E, d_E)$ et $(F, d_F)$ deux espaces métriques. On suppose que $F$ est compact.

1. Montrer que la projection $p : E \times F \to E$ est fermée
2. Soit $f$ une application de $E$ dans $F$. On suppose que le graphe de $f$ est fermé dans $E \times F$ muni de la distance $d((x, y), (x', y')) = \max(d_E(x, x'), d_F(y, y'))$. Montrer que $f$ est continue.
3. On suppose $f$ continue, montrer que le graphe de $f$ est fermé.

**Exercice 4** On considère un espace métrique compact $(E, d)$ et une application $f : E \to E$. On suppose que $f$ est une application continue et que $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$ pour tous $x$ et $y$. Montrer que $f$ est bijective et c'est une isométrie.

**Exercice 5** Soit $(X, d)$ un espace métrique compact. Montrer que $X$ est séparable.

**Exercice 6** Soit $C = [0, 1]^{\mathbb{N}}$. On le munit d'une métrique $\delta$ par $\delta(x, y) = \sum_n \frac{1}{2^n} |x_n - y_n|$. Montrer que $(C, \delta)$ est compact. Cet espace s'appelle le cube de Hilbert.

**Exercice 7** Soit $(X, d)$ un espace métrique dont la distance est bornée par un réel $a > 0$, et qui est séparable. On note $(u_n)$ une famille dénombrable dense dans $X$.

On définit une application $\phi : X \to C$ (où $(C, \delta)$ est l'espace défini dans l'exercice précédent) par : $\phi(x) = (d(x, u_n)/a)_n$.

1. Montrer que $\phi$ est continue et injective.
2. Montrer que $\phi$ est un homéomorphisme de $X$ sur $\phi(X)$.
3. Montrer que tout compact est homéomorphe à un sous-espace fermé de $C$.

**Exercice 8** Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels positifs et $K_\alpha$ le sous-ensemble suivant de $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ :

$$\{(u_n)_{n\geq 0} \in \ell^1 : |u_n| \leq \alpha_n\}.$$

Montrer que $K_\alpha$ est compact si et seulement si $\alpha$ appartient à $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

**Exercice 9** Soit $E$ l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On munit $E$ d'une métrique par : $d(f, g) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{2^k} \min(1, \|f^{(k)} - g^{(k)}\|_\infty)$.

1. Montrer que $(E, d)$ est un espace métrique complet.
2. On dit qu'une partie $X$ de $E$ est très bornée si pour tout $r > 0$, il existe $\lambda > 0$ tel que $X \subset \lambda B(0, r)$. Montrer que $E$ est borné mais pas très borné.
3. Montrer que les parties compactes de $E$ sont exactement les parties fermées et très bornées. Indication : on pourra montrer que si $X$ est très borné, il existe $(M_k)$ une suite de réels $> 0$ tels que pour tout $f \in X$, $\|f^{(k)}\|_\infty \leq M_k$.
4. En déduire qu'il n'existe pas de norme sur $E$ qui définisse les mêmes ouverts que $d$.

**Exercice 10** Soit $(X, d_X)$ et $(Y, d_Y)$ deux espaces métriques. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions bornées de $X$ dans $Y$, muni de la distance $d(f, g) = \sup_{x\in X} d_Y(f(x), g(x))$.

1. Montrer que si $Y$ est complet, alors $(\mathcal{F}, d)$ est complet.
2. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues bornées de $X$ dans $Y$. Montrer que c'est une partie fermée de $\mathcal{F}$.
3. Soit $Z$ une partie fermée de $Y$. Montrer que le sous-ensemble $\mathcal{C}_Z$ de $\mathcal{C}$ formé des fonctions dont l'image est contenue dans $Z$ est un fermé de $\mathcal{C}$.
4. Supposons $X$ compact, et soit $U$ une partie ouverte de $Y$. Montrer que le sous-ensemble $\mathcal{C}_U$ de $\mathcal{C}$ formé des fonctions dont l'image est contenue dans $U$ est un ouvert de $\mathcal{C}$. Montrer que la propriété n'est pas nécessairement vraie si $X$ n'est pas compact.
5. Si $a > 0$, on note $\mathcal{L}_a$ l'ensemble des fonctions $a$-lipschitziennes de $X$ dans $Y$. Montrer que c'est un fermé de $\mathcal{C}$.

6. On suppose $X$ et $Y$ compacts. Montrer que chaque $\mathcal{L}_a$ est compact.
7. Montrer que $\mathcal{C}$ n'est pas forcément compact même si $X$ et $Y$ sont compacts, et que $\mathcal{L}_a$ n'est pas forcément compact si $X$ ou $Y$ n'est pas compact.

**Exercice 11** Soit $(X, d)$ un espace métrique, et $(K_n)$ une suite de compacts connexes de $X$, vérifiant $K_{n+1} \subset K_n$. Montrer que $\cap_n K_n$ est connexe. La propriété reste-elle vraie si on ne suppose pas les $K_n$ compacts ?

**Exercice 12** Soit $(X, d)$ un espace métrique compact, et $(x_n)$ une suite d'éléments de $X$ telle que $d(x_n, x_{n+1}) \to 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)$ est connexe. La propriété reste-elle vraie si on ne suppose pas $X$ compact ?

**Exercice 13** Soit $(X, d)$ un espace métrique. Si $x \in X$, on note $C(x)$ la composante connexe de $x$, et $C'(x)$ l'intersection des ouverts fermés de $X$ contenant $x$.

1. Montrer que $C(x) \subset C'(x)$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. On dit que $y$ est $\varepsilon$-relié à $x$ s'il existe $x_0, \ldots, x_n$ avec $x_0 = x$ et $x_n = y$ et $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$. On note $C_\varepsilon(x)$ l'ensemble des points qui sont $\varepsilon$-reliés à $x$. Montrer que $C_\varepsilon(x)$ est ouvert et fermé, et en déduire que $C'(x) \subset C_\varepsilon(x)$.
3. Supposons $X$ compact. Montrer que $\cap_{\varepsilon>0} C_\varepsilon(x) \subset C(x)$, et en déduire que $C(x) = C'(x)$.
4. On considère le sous-espace de $\mathbb{R}^2$ suivant : $X = D_1 \cup D_{-1} \cup (\cup_{n\geq 2} R_n)$, où $D_a$ est la droite d'équation $y = a$ et $R_n$ est le rectangle de sommets $(\pm n, \pm(1-1/n))$. Donner les composantes connexes de $X$, et vérifier qu'il existe $x$ tel que $C(x) \neq C'(x)$.

## Calcul différentiel

**Exercice 14** Soit $E = \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $x \mapsto \|x\|_2$ est différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et calculer sa différentielle.
2. Montrer que $x \mapsto \|x\|_\infty$ est différentiable exactement aux points $x = (x_1, \ldots, x_n)$ tels qu'il existe $i$ tel que $|x_i| > |x_j|$ pour tout $j \neq i$, et calculer sa différentielle en ces points.
3. Montrer que $x \mapsto \|x\|_1$ est différentiable exactement aux points $x = (x_1, \ldots, x_n)$ tels que $x_i \neq 0$ pour tout $i$, et calculer sa différentielle en ces points.

**Exercice 15** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$, la fonction $t \mapsto f(tu)$ est dérivable en 0, mais que $f$ n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

**Exercice 16** Soit $E$ et $F$ deux evn de dimension finie, et $f : E \to F$ une fonction $C^1$. On suppose que $f$ est homogène de degré 1, c'est-à-dire que pour tout $x \in E$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(tx) = tf(x)$. Montrer que $f$ est linéaire.

**Exercice 17 (lemme de Rolle)** Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné non vide, et $f$ une fonction continue sur $\bar{U}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, différentiable sur $U$, et nulle sur la frontière de $U$. Montrer qu'il existe $a \in U$ tel que $df_a = 0$.