ENS de Lyon **TD de révisions** **04/11/2011**
Topologie

Exercice 1 Soit f une fonction croissante sur $[0,1]$. Montrer que les points de discontinuité de f (points où f n'est pas continue) forment un ensemble au plus dénombrable.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f((0,0)) = 0$. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'application $x \mapsto f(x,y)$ est continue, que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $y \mapsto f(x,y)$ est continue ; mais que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 3
1. Les fonctions continues de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$ vérifient-elles le théorème des valeurs intermédiaires ?

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Si f est injective sur $\mathbb{Q}$, est-elle nécessairement injective sur $\mathbb{R}$? Et si elle est injective sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

Exercice 4 Soit E l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la métrique $d(f,g) = \Sigma_{k \geq 0} 2^{-k} min(1, \|f^{(k)} - g^{(k)}\|_\infty)$. On dit qu'une partie X de E est très bornée si pour tout $r > 0$, il existe $\lambda > 0$ tel que $X \subset \lambda B(0,r)$.
1. Montrer que E est borné mais pas très borné.

2. Montrer que les parties compactes de E sont exactement les parties fermées très bornées.

Exercice 5 Soit (X,d) un espace métrique compact. On considère l'espace vectoriel E des fonctions lipschitziennes réelles de X, muni de la norme $||f|| = sup_{x \in X}|f(x)| + sup_{x \neq x'} \frac{|f(x) - f(x')|}{d(x,x')}$.
1. Montrer que $(E, || \cdot ||)$ est complet.

2. Soit Y un espace métrique compact et pour $a > 0$, on note $\mathcal{L}_a$ l'ensemble des fonctions a-lipschitziennes de X dans Y que l'on munit de la distance sup. Montrer que pour tout $a > 0$, l'espace $\mathcal{L}_a$ est compact.

Exercice 6 Notons $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ muni de la norme sup. Soit $K : [a,b]^2 \to R$ continue. On définit l'opérateur $T_K : E \to E$ tel que $T_K(f)(x) = \int_a^b K(x,y) f(y) \mathrm{d}y$. Montrer que l'image d'une partie bornée de E par T_K est relativement compacte dans E.

Exercice 7
Soit (X,d) un espace métrique dans lequel toute boule ouverte est connexe. Soit A une partie connexe. Montrer que l'ensemble

$$A_\epsilon = \{x \in X, d(x,A) < \epsilon\}$$

est connexe pour tout ϵ strictement positif.

Exercice 8 Soit (X, d) un espace métrique, et (K_n) une suite de compacts connexes de X, vérifiant $K_{n+1} \subset K_n$. Montrer que $\bigcap_n K_n$ est connexe. La propriété reste-t-elle vraie si on ne suppose pas les K_n compacts ?

Exercice 9 Soit (X, d) un espace métrique. Si $x \in X$, on note $C(x)$ la composante connexe de x, et $C'(x)$ l'intersection des ouverts fermés contenant x.

1. Montrer que $C(x) \subset C'(x)$.
2. Soit $\epsilon > 0$. On dit que y est ϵ-relié à x s'il existe $x_0, \cdots, x_n$ avec $x_0 = x$ et $x_n = y$ et $d(x_i, x_{i+1}) < \epsilon$. On note $C_\epsilon(x)$ l'ensemble des points qui sont ϵ reliés à x. Montrer que $C_\epsilon(x)$ est ouvert et fermé, et en déduire que $C'(x) \subset C_\epsilon(x)$.
3. Supposons X compact. Montrer que $\bigcap_{\epsilon>0} C_\epsilon(x) \subset C(x)$, et en déduire que $C(x) = C'(x)$.
4. On considère le sous-espace de $\mathbb{R}^2$ suivant : $X = D_1 \cup D_{-1} \cup (\cup_{n\geq 2} R_n)$, où D_a est la droite d'équation $y = a$ et R_n est le rectangle de sommets $(\pm n, \pm(1 - 1/n))$. Donner les composantes connexes de X, et vérifier qu'il existe x tel que $C(x) \neq C'(x)$.