ENS de Lyon **TD 8bis** **14/11/2011**
Calcul différentiel

Exercice 1 Soit $n > 0$ un entier, et $r \leq n$. On note V_r le sous-espace de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices de rang exactement r.

1. Montrer que l'ensemble des matrices de rang $\geq r$ est un ouvert de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, avec $A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$. Montrer que M est de rang r si et seulement si on a $D = CA^{-1}B$.
3. En déduire que V_r est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dont on donnera la dimension.
4. Montrer que si $0 < r < n$ l'ensemble des matrices de rang $\leq r$ n'est pas une sous-variété.

Exercice 2 Soit E et F deux evn de dimension finie, et $f : E \to F$ une fonction $\mathcal{C}^k$. Montrer que $\Gamma = \{(x, f(x)), x \in E\}$ est une sous-variété $\mathcal{C}^k$ de $E \times F$.

Exercice 3 Montrer que les projecteurs de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ de rang exactement 1 forment une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ dont on donnera la dimension.

Exercice 4 Soit E et F deux evn de dimension finie, U un ouvert de E, f une fonction $\mathcal{C}^k$ de U dans F. On suppose que f est une immersion en tout point, que f est injective et que f est propre (c'est-à-dire que l'image réciproque d'un compact est compact). Montrer que $f(U)$ est une sous-variété $\mathcal{C}^k$ de F.

Le résultat reste-t-il vrai si on ne suppose pas f propre ?

Exercice 5 Soit E, F, G trois evn de dimension finie, U un ouvert de E et V un ouvert de F. Soit $f : U \times V \to G$ une application $\mathcal{C}^k$, et soit $(x_0, y_0) \in U \times V$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et $d_F f_{(x_0,y_0)}$ est injective. Montrer que les conclusions du théorème des fonctions implicites sont vraies pour f.

Indication : on pourra montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel $\tilde{G}$ de G, une fonction $\mathcal{C}^k$ $\tilde{f} : U' \times V' \to \tilde{G}$, où U' est un voisinage de x_0 et V' un voisinage de y_0, telle que $f(x, y) = 0$ si et seulement si $\tilde{f}(x, y) = 0$ pour les $(x, y) \in U' \times V'$, et telle que $d_F \tilde{f}_{(x_0,y_0)}$ est inversible.

Exercice 6 Soit U le plan privé de l'origine et

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

Montrer que f est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de U, mais n'est pas un difféomorphisme global.
Expliciter des ouverts U et W, "aussi grands que possible", tels que $f : U \to W$ soit un difféomorphisme global.

Exercice 7 Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ suivante :

$$f(x) = x + x^2 \sin(\frac{\pi}{x}) \text{ si } x \neq 0, f(0) = 0.$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, que $f'(0) \neq 0$, mais que f n'est inversible sur aucun voisinage de 0. Pourquoi le théorème d'inversion locale ne s'applique-t-il pas ici ?

Exercice 8 On considère le système d'équations suivant, pour un paramètre réel t :

$$x = \frac{1}{2}\sin(x+y) + t,\ y = \frac{1}{2}\cos(x-y) - t - \frac{1}{2}$$

aux inconnues x et y.

(i) Montrer que ce système admet une unique solution $(x(t), y(t))$ et que ces fonctions de t sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

(ii) Donner un développement limité à l'ordre deux de $x(t)$ et $y(t)$ au point $x = y = 0$.

(iii) Généralisation : Soit $f : (x, \lambda) \mapsto f(x, \lambda)$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe k tel que, pour tous x, λ

$$||\partial_1 f(x, y)|| \leq k < 1.$$

Montrer que l'équation $f(x, \lambda) = x$ admet pour chaque λ une unique solution $x = g(\lambda)$, et que l'application $\lambda \mapsto g(\lambda)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$. Calculer dg_λ.