ENS Lyon **TD 2**
EDP

Exercice 1 [Équation d'advection, solution fortes]

Soit $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, b une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ telle que $\nabla \cdot b \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (l'opérateur divergence n'agit ici que sur la variable d'espace $\mathbb{R}^d$). On considère l'équation d'advection suivante d'inconnue $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \partial_t u + \nabla \cdot (bu) = 0, & \forall\, (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \\ u(x,0) = g(x), & \forall\, x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

1. Définir les caractéristiques du système, et le flot associé $t, y \to X(t,y)$.
2. On pose $J(t,x) = \det((\nabla_x X)(t,x))$. Écrire l'équation aux dérivées partielles satisfaite par J.
3. Montrer qu'il existe une unique solution $u \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ donnée par $u(t, X(t,y))J(t,y) = u_0(y)$.
4. Montrer que l'intégrale de u est conservée.

Exercice 2 [Équation de Hamilton-Jacobi] On se propose, dans cette partie, d'étudier le problème de Cauchy suivant pour l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + H(x, d_x u) &= 0, \forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) &= g(x), \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

On a $H(x,p)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $u\colon \mathbb{R}^n \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est l'inconnue, $u = u(t,x)$.

Déterminer l'équation différentielle hamiltonnienne (d'ordre 1) que doivent vérifier les caractéristiques $t \mapsto (x(t), p(t))$ associées à 1. Donner également l'équation vérifiée par $\varphi(t) = u(t, x(t))$. On définit $L(x(t), \dot{x}(t)) = \dot{x}(t)p(t) - H(x,p)$.

Exercice 3 [Équations d'Euler-Lagrange]

Soit $\mathcal{F} : \begin{cases} C_0^1([0,1], ||.||_\infty) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^1 L(x(t), x'(t), t)dt \end{cases}$ avec L de classe C^1.

1. Montrer que f est C^1 et sa différentielle est :
   $\mathrm{d}\mathcal{F}_x(h) = \int_0^1 h(t) \frac{\partial L}{\partial x}(x(t), x'(t), t) + h'(t) \frac{\partial L}{\partial x'}(x(t), x'(t), t)\mathrm{d}t$
2. Soit F continue sur un $[a,b]$ telle que pour h de classe C^1 nulle aux bords, $\int_a^b F(x)h'(x)\mathrm{d}x = 0$. Montrer que F est constante.
3. Soit x un point critique de $\mathcal{F}$.
   Montrer que $t \mapsto \frac{\partial L}{\partial x'}(x(t), x'(t), t)$ est de classe C^1. (On pourra introduire la primitive de $t \mapsto \frac{\partial L}{\partial x}(x(t), x'(t), t)$)
   Montrer que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) + \frac{\partial L}{\partial x}(x(t), x'(t), t) = 0$$

Exercice 4 [Lien lagrangien, hamiltonien] On suppose que le lagrangien L (au moins C^2) satisfait les conditions suivantes :

$$q \mapsto L(q) \text{ est convexe et } \qquad \lim_{|q|\to\infty} \frac{L(q)}{|q|} = +\infty. \tag{2}$$

On définit la transformée de Legendre de L par :

$$L^*(p) := \sup_{q\in\mathbb{R}^n} \{p \cdot q - L(q)\} \quad \forall p \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

1. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'application $v \mapsto p = D_v L(x, v)$ est un difféomorphisme de telle sorte que l'on peut définir un changement de variables $(x, v) \mapsto (x, p)$ et qu'ainsi on peut exprimer v comme une fonction $v = V(x, p)$ de x et p. On définit alors l'hamiltonien H associé au lagrangien L par

   $$H(x, p) := \langle p, V(x, p)\rangle - L(x, V(x, p)).$$

   Montrer que $x(\cdot)$ satisfait les équations d'Euler-Lagrange ssi $(x(\cdot), p(\cdot))$, avec $p(t) = D_v L(x(t), \dot{x}(t))$, satisfait les équations de Hamilton,

   $$\begin{cases} \dot{x}(t) &= D_p H(x(t), p(t)) \\ \dot{p}(t) &= -D_x H(x(t), p(t)). \end{cases} \tag{4}$$

   et que dans ce cas $t \mapsto H(x(t), p(t))$ est constant.

2. On va construire un candidat pour résoudre l'équation (1) en minimisant la fonctionnelle d'action avec un terme supplémentaire prenant en compte la condition initiale. Considérons la fonction

   $$u(t, x) = \inf \left\{ \int_0^t L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s))ds + g(\gamma(0)) \,|\gamma \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n), \gamma(t) = x \right\} \tag{5}$$

   Pour tout chemin $\gamma \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$, nous poserons $y = \gamma(0)$. On suppose que H satisfait les hypothèses 2 et que g est lipschitzienne.

   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $t > 0$ on a

   $$u(t, x) = \min_{y\in\mathbb{R}^n} \left\{ tL\left(\frac{x - y}{t}\right) + g(y) \right\} \qquad \text{(Formule de Hopf-Lax).} \tag{6}$$

   (b) Montrer que $x \mapsto u(t, x)$ est lipschitzienne uniformément en t et que $u(0, x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

   (c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $0 \le s \le t$, on a

   $$u(t, x) = \min_{y\in\mathbb{R}^n} \left\{ (t - s)L\left(\frac{x - y}{t - s}\right) + u(s, y) \right\}$$

   (d) Montrer que u est lipschitzienne sur $[0, +\infty[\times\mathbb{R}^n$.

   (e) Conclure que la fonction u définie par la formule de Hopf-Lax (6) est différentiable presque partout sur $[0, +\infty[\times\mathbb{R}^n$ et est solution du problème (1).

   (f) réciproquement montrer qu'une solution de (1) vérifie (5).