ENS Lyon **TD 5/revision**
EDP

Exercice 1 Soit $u\colon U \to \mathbb{R}$, harmonique. On veut montrer que pour toutes boules $B(x_0, r) \subset U$ et tout multi-indice α d'ordre $|\alpha| = k$:

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} ||u||_{L^1(B(x_0,r))}. \tag{1}$$

Avec

$$C_0 = \frac{1}{\alpha(n)} \quad C_k = \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\alpha(n)}. \tag{2}$$

1. Montrer que l'inégalité est vraie à l'ordre 0. Démontrer l'inégalité pour $k = 1$.
2. Montrer que si l'inégalité est vraie à l'ordre $k - 1$ alors elle l'est à l'ordre k.

Exercice 2 On considère le probeème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2}\right) & = & 0 \\ u(0, x) & = & g(x), \end{cases} \tag{3}$$

avec comme condition initiale

$$g_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} & x < 0 \\ x & \text{si} & x > 0. \end{cases}$$

où

$$g_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} & x < 0 \\ x & \text{si} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si} & x > 1. \end{cases}$$

1. Donner la formulation faible de (**??**) avec g_1 puis g_2 comme condition initiale.
2. Calculer explicitement l'unique solution entropique pour chacun des systèmes (2 solutions a calculer).
3. Montrer que ce sont bien des solutions faibles, entropique (oui oui il faut faire le calcul).