ENS Lyon **TD 3**
EDP

Exercice 1 [Famille régularisante] Soit $N \geq 1$ et soit $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ t.q. $\rho \geq 0$, $\{x \in \mathbb{R}^N\ ;\ \rho(x) \neq 0\} \subset B_1$ et $\int \rho(x)dx = 1$. On appelle famille régularisante (ou famille de noyaux régularisants) la famille de fonctions $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ définie par : $\rho_n(x) = n^N \rho(nx), x \in \mathbb{R}^N$, $n \in \mathbb{N}^\star$.

Soit $N \geq 1$, $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une famille régularisante. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

1. Montrer que $f \star \rho_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$.
2. Montrer que $f \star \rho_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ lorsque $n \to +\infty$.
3. Montrer que $C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Exercice 2 [Quelques exemples de distributions] Soit $1 \leq p \leq +\infty$. On note $L^p_{loc}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions f sur Ω telles que pour tout compact K de Ω,

$$\int_K |f(x)|^p\, dx < \infty$$

(vérifier que pour ces espaces, $p \leq q$ implique $L^q_{loc} \subset L^p_{loc}$).

1. Montrer qu'à une fonction f de L^p_{loc} correspond une unique distribution T_f qui vérifie

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle T_f, \varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

   Montrer que la masse de Dirac δ ne correspond à aucune fonction de L^1_{loc} (donc à aucune fonction de L^p_{loc} pour $1 \leq p \leq +\infty$).
   Montrer que l'application $f \to T_f$ est une injection de L^p dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.
2. Montrer que si une distribution T vérifie

$$\exists\, C > 0 \ \mid\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad |\langle T, \varphi\rangle| \leq C\|\varphi\|_{L^2}$$

   alors il existe une unique fonction $f \in L^2$ telle que $T = T_f$.
3. Ici ; et ensuite $\Omega = \mathbb{R}$. Calculer les deux premières dérivées, au sens des distributions, de l'application $x \to |x|$
4. Montrer que la formule suivante définit une distribution (notée vp. $\left(\frac{1}{x}\right)$)

$$\left\langle \text{vp.}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx.$$

   Montrer que la formule suivante définit une distribution (notée Pf. $\left(\frac{1}{x^2}\right)$)

$$\left\langle \text{Pf.}\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\epsilon\to 0} \left\{ \int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx - 2\frac{\varphi(0)}{\epsilon} \right\}.$$

5. Calculer la dérivé de $x \to \ln(|x|)$
6. Définir Pf. $\left(\frac{1}{x^k}\right)$ pour k entier non-nul.
7. Définir en dimension 2 et 3 la distribution $1/|x|$ où $|.|$ désigne la distance euclidienne.

Exercice 3 [Fundamental theorem of calculus] Dans tout l'exercice, on fixe $\Omega = \mathbb{R}$ et χ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\int \chi(x)dx = 1$.

1. Montrer que φ, appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, admet une primitive dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\int \varphi(x)\,dx = 0$. En déduire que
$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \exists!\, C_\varphi \in \mathbb{R},\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \ \mid\ \varphi - C_\varphi \chi = \varphi'.$$
2. Montrer que si $T' = 0$ alors $T = \langle T, \chi\rangle \mathbb{1}$. Que se passe-t-il si T' est nulle sur U ouvert connexe de $\mathbb{R}$?
3. Application : montrer que si T vérifie l'équation différentielle suivante (au sens des distributions)
$$T' + g(x)T = 0,$$
avec $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors T est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ qui vérifie l'équation différentielle au sens ordinaire.

Exercice 4 [Équation de transport à coefficients constants avec bord] On s'intéresse au problème linéaire suivant (a est un réel strictement positif) :
$$\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R}, t \geq 0, & \partial_t u + a\partial_x u = 0 \\ \forall\, x \in \mathbb{R}, & u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{1}$$
où u_0 est dans $L^\infty(\mathbb{R})$ donnée.

1. Construire les caractéristiques du problème. En déduire une construction explicite de la solution.
2. Vérifier que la solution ainsi construite est bien une solution faible. Montrer que la solution faible est unique.
3. On suppose que $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$. Soit u solution faible de (1). A-t-on pour tout $t \geq 0$, que $u(t,\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R})$?