ENS Lyon **TD 4**
EDP

Exercice 1 [Définition d'une distribution]

Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Par définition, une distribution est une forme linéaire (réelle ou complexe) sur $\mathcal{D}(\Omega)$ vérifiant l'une des deux conditions de continuité suivantes :
(A) Pour toute suite de fonctions $(\phi_n)_{n\geq 0}$ de $C^\infty(\Omega)$, à supports inclus dans un compact K de Ω pour tout $n \geq 0$ et qui convergent uniformément vers 0 ainsi que toutes leurs dérivées, alors

$$\langle T, \phi_n \rangle \to 0.$$

(B) Pour tout compact K de Ω, il existe $C > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que pour toute fonction ϕ C^∞ sur Ω à support compact inclus dans K,

$$|\langle T, \phi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_K |\partial^\alpha \phi|.$$

Montrer que ces deux conditions sont équivalentes.

Exercice 2 Calculer explicitement l'unique solution entropique de

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2}\right) & = & 0 \\ u(0,x) & = & g(x), \end{cases}$$

avec

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} & x < -1 \\ 0 & \text{si} & -1 < x < 0 \\ 2 & \text{si} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si} & x > 1. \end{cases}$$

Exercice 3 [Méthode de Viscosité évanescente.] On considère l'equation de Burgers avec un terme supplémentaire de viscosité.

$$\partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2}\right) = \varepsilon\, \partial_x^2 u. \tag{1}$$

On cherche les solutions qui sont des ondes

$$u(t,x) = u_\varepsilon(x - \sigma t). \tag{2}$$

On impose aussi les limites de $u(t,.)$ en $-\infty$ et $+\infty$ par u_g et u_d (où $u_g > u_d$ sont des réels). Enfin, on impose aussi les limites de $\partial_x u(t,.)$ par 0.

1. Calculer u_ε pour que l'onde associé (**??**) soit solution de (**??**), et retrouver au passage la relation de Rankine-Hugoniot.
2. Montrer que $\varepsilon |\partial_x u_\varepsilon|^2 \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} M\,\delta$ où M est un réel et δ est la distribution de Dirac.