ENS Lyon **TD 7**
EDP

Exercice 1 Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $g \in C(\partial U)$. On considère le problème de Laplace :

$$\begin{cases} -\Delta u &= 0 \quad \text{dans } U \\ u &= g \quad \text{sur } \partial U \end{cases} \tag{1}$$

On note u_g une solution de ce problème.

1. Soit $g_1, g_2 \in C(\partial U)$. On suppose $g_1 \geq g_2$ sur ∂U et $g_1 \neq g_2$. Montrer que $u_{g_1} > u_{g_2}$ sur U.
2. Soit $g_1, g_2 \in C(\partial U)$. Montrer que $\forall x \in U$, $|u_{g_1}(x) - u_{g_2}(x)| \leq \max_{\partial U} |g_1 - g_2|$.
3. En déduire l'unicité du problème de Laplace dans $C^2(U) \cap C(\bar{U})$.

Exercice 2 [Formulation variationnelle.]
Problème de Poisson et Principe de Dirichlet.
Soit U un ouvert borné. On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{dans } U \\ u &= g \quad \text{sur } \partial U \end{cases} \tag{2}$$

1. Montrer l'unicité de la solution. (Ici et dans les questions suivantes ∂U est C^1.)

   On veut montrer que la solution du problème de Poisson (2) peut être obtenue en minimisant une certaine fonctionnelle. Considérons donc la fonctionnelle d'energie

   $$I[w] := \int_U \left(\frac{1}{2} |Dw|^2 - wf \right) dx,$$

   w appartenant à l'espace

   $$A := \{ w \in C^2(\bar{U}) | w = g \text{ sur } \partial U \}.$$

2. Montrer que si $u \in C^2(\bar{U})$ est une solution de (2) alors

   $$I[u] = \min_{w \in A} I[w]. \tag{3}$$

3. Inversement, montrer que si $u \in A$ satisfait (3), alors u est solution du problème de Poisson (2).

Exercice 3 [Inégalité de Poincaré] On considère la suite de fonctions $v_n(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x)$ sur $]0;1[$, pour $n \geq 0$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne orthonormée dans $H_0^1(]0;1[)$.

2. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall\, v \in H_0^1(0;1), \quad \|v\|_{L^2(0;1)} \leq C\, \|v'\|_{L^2(0;1)} \tag{4}$$

3. Montrer, en utilisant la base hilbertienne $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que la meilleure constante C pour laquelle (4) est vérifiée est $C = 1/\pi$.

Exercice 4 [Résolution d'un problème posé sous forme variationnelle.] Pour $u, v \in H^1(]0,1[)$, on note Du, Dv leurs dérivées au sens des distributions et on pose

$$a(u,v) = \left(\int_0^1 DuDv\right) + \left(\int_0^1 uv\right) - \left(\int_0^1 u\right)\left(\int_0^1 v\right).$$

Soit $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 1$. On pose $V = \{v \in H^1(]0,1[);\ \gamma v(0) = k\gamma v(1)\}$.

1. Montrer que V est un sous espace vectoriel fermé de $H^1(]0,1[)$. Dans la suite, on munit V du produit scalaire de $H^1(]0,1[)$ (ce qui en fait un Hilbert).
2. Montrer qu'il existe $C > 0$ (ne dépendant que de k) telle que

$$\forall\, v \in V, \quad \|v\|_{L^\infty(0,1)} \leq C\, \|Dv\|_{L^2(0,1)}.$$

Indication : On pourra commencer par montrer qu'il existe $C_1 > 0$ tel que

$$\forall\, v \in V, \quad |v(1)| \leq C_1\, \|Dv\|_{L^2(0,1)}.$$

3. Montrer que la forme bilinéaire a est coercive sur V. En déduire que, pour tout $f \in L^2(0,1)$, il existe un unique $u \in V$ tel que

$$\forall\, v \in V, \quad a(u,v) = \int_0^1 fv. \tag{5}$$

4. Soient $f \in L^2(0,1)$, et $u \in V$ la solution de (5). Montrer que $u \in H^2(]0,1[)$, i.e. $u \in H^1(]0,1[)$ et $Du \in H^1(]0,1[)$.
5. Soient $f \in C([0,1])$, et $u \in V$ la solution de (5). Montrer que u est l'unique solution du problème suivant

$$\begin{cases} u \in C^2([0,1]), \\[2ex] \forall\, x \in [0,1], \quad -u''(x) + u(x) - \int_0^1 u(y)dy = f(x), \\[2ex] u(0) = ku(1),\ u'(1) = ku'(0). \end{cases}$$

Exercice 5 (Injections de Sobolev) Le but de l'exercice est de montrer les trois résultats suivants :
(i) $H^1(\mathbb{R})$ s'injecte continûment dans $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $2 \leq p \leq +\infty$,
(ii) $H^1(\mathbb{R}^2)$ s'injecte continûment dans $L^p(\mathbb{R}^2)$ pour tout $2 \leq p < +\infty$,
(iii) $H^1(\mathbb{R}^3)$ s'injecte continûment dans $L^p(\mathbb{R}^3)$ pour tout $2 \leq p \leq 6$.

A- Cas de la dimension 1

1. Soit $u \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que $\|u\|_\infty \leq \|u\|_{H^1}$.
2. En déduire que $H^1(\mathbb{R})$ s'injecte continûment dans $L^\infty(\mathbb{R})$, puis que $H^1(\mathbb{R})$ s'injecte continûment dans $L^p(\mathbb{R})$, pour tout $2 \leq p \leq +\infty$.
3. Soit $u \in H^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\lim_{|x|\to+\infty} u(x) = 0$.

B- Cas de la dimension 2

On rappelle que

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^2)} &= \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \end{aligned}$$

1. Soient $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ et $t \geq 1$. Montrer que
$$\|u\|^t_{L^{2t}(\mathbb{R}^2)} \leq t\|u\|^{t-1}_{L^{2(t-1)}(\mathbb{R}^2)} \; \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$
<u>Indication</u> : Considérer la norme L^2 de la fonction $|u|^{t-1}u$.

2. En déduire que
$$\|u\|_{L^{2t}(\mathbb{R}^2)} \leq C\left(\|u\|_{L^{2(t-1)}} + \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\right),$$
où C ne dépend ni de u, ni de t.
<u>Indication</u> : Commencer par montrer pour $\alpha \in [0,1]$,
$$\forall\, a, b \geq 0, \quad a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}\,(a+b).$$
3. En déduire que pour une certaine constante $C(q)$ dépendant de q on a
$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq C(q)\,\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}$$
tout d'abord pour $2 \leq q \leq 4$, puis pour $2 \leq q < +\infty$. Conclure à l'injection de $H^1(\mathbb{R}^2)$ dans $L^p(\mathbb{R}^2)$ pour tout $2 \leq p < +\infty$.
4. Est-ce que $H^1(\mathbb{R}^2)$ s'injecte dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)$?

C- Cas de la dimension 3

On rappelle que

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} &= \left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x_3}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^3)} &= \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \end{aligned}$$

1. (Préliminaire). Soient $f_1, f_2, f_3 \in L^2(\mathbb{R}^2)$. On pose :

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_2, x_3)\, f_2(x_1, x_3)\, f_3(x_1, x_2).$$

   Vérifier que

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \leq \prod_{i=1}^{3} \|f_i\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

2. Soient $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ et $t \geq 1$. Montrer que

$$\|u\|^t_{L^{3t/2}(\mathbb{R}^3)} \leq t \|u\|^{t-1}_{L^{2(t-1)}(\mathbb{R}^3)} \prod_{i=1}^{3} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^{\frac{1}{3}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

   Indication : Montrer d'abord que pour $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ on a

$$\|f\|_{L^{3/2}(\mathbb{R}^3)} \leq \prod_{i=1}^{3} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|^{\frac{1}{3}}_{L^1(\mathbb{R}^3)}$$

   puis considérer la norme $L^{3/2}$ de la fonction $|u|^{t-1}u$.

3. En faisant un bon choix pour t, en déduire qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall\, u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3), \quad \|u\|_{L^6(\mathbb{R}^3)} \leq C\, \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

   Conclure à l'injection de $H^1(\mathbb{R}^3)$ dans $L^6(\mathbb{R}^3)$.

4. Est-ce que $H^1(\mathbb{R}^3)$ s'injecte dans $L^{6+\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$?
   Indication : considérer la fonction de H^1 suivante sur $B(0, \frac{1}{2})$

$$u(x,y,z) = \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{1-3/2}}{\ln\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}.$$