ENS Lyon **TD 6**
EDP

Exercice 1 [fonction de Green] On rappelle la formule de Stokes pour E champ de vecteurs $\in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C^0\bar{\Omega}$ avec Ω ouvert borné régulier, et n la normale extérieur au bord.

$$\int_\Omega \nabla \cdot E = \int_{\partial\Omega} E.n \tag{1}$$

En déduire que pour deux fonctions u, v régulières ($\in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$) de $\Omega \to \mathbb{R}$ on a :

$$\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}. \tag{2}$$

On définit la fonction suivante sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\ln|x| & (n=2) \\ \dfrac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\dfrac{1}{|x|^{n-2}} & (n \geq 3) \end{cases}.$$

Soit $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$. On pose

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)dy.$$

1. Montrer que u est bien défini et que $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$.
2. Montrer que $-\Delta u = f$ dans $\mathbb{R}^n$.
3. Donner une interprétation de ce résutat à l'aide de la distribution de Dirac.

On se place maintenant sur Ω. En utilisant la formule de Stokes, montrer que pour toute fonction u, harmonique, régulière sur Ω :

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} u(y)\partial_n\Phi(x-y) + \int_{\partial\Omega} \Phi(x-y)\partial_n u(y).$$

on suppose qu'il existe $h : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ telle que pour x fixé :

$$\begin{cases} -\Delta_y h(x,y) = 0 & \forall y \in \Omega \\ h(x,y) = -\Phi(x-y) & \forall y \in \partial\Omega \end{cases}$$

En déduire qu'il existe une fonction $G : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ telle que

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} u(y)\partial_n G(x,y).$$

G est le noyau de Green. Donner une formule pour la solution dans le cas régulier de l'EDP :

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Exercice 2 Attention il est difficile.

Exercice 3 Soit $u\colon U \to \mathbb{R}$, harmonique. On veut montrer que pour toute boule $B(x_0, r) \subset U$ et tout multi-indice α d'ordre $|\alpha| = k$:

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} ||u||_{L^1(B(x_0,r))}. \tag{3}$$

Avec

$$C_0 = \frac{1}{\alpha(n)} \quad C_k = \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\alpha(n)}. \tag{4}$$

1. Montrer que l'inégalité est vraie à l'ordre 0. Démontrer l'inégalité pour $k = 1$.
2. Montrer que si l'inégalité est vraie à l'ordre $k - 1$ alors elle l'est à l'ordre k.

Exercice 4 [harmonique entraîne analytique] En utilisant l'inégalité (3), montrer toute fonction harmonique $u\colon U \to \mathbb{R}$ est analytique. C'est à dire que pour tout $x_0 \in U$ il existe une boule ouverte $B(x_0, r) \subset U$ sur laquelle

$$u(x) = \sum_\alpha \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha.$$

Exercice 5 [Théorème de Liouville] Montrer que si $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est harmonique, bornée alors elle est constante.

Exercice 6 [Principe du maximun] Donner une preuve directe du fait que si $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ est sur-harmonique dans un ouvert borné U, alors

$$\max_{\bar{U}} u = \max_{\partial U} u.$$

Indication : Se ramener à une fonction strictement sur-harmonique.