ENS Lyon **11 octobre 2010**
Département de Mathématiques **TD-3**
Calcul différentiel 1

Exercice 1

Soit E un evn et $g : E \longrightarrow E$ une application différentiable telle que :

$$\exists k \in]0,1[, \quad \forall x \in E, \quad ||Dg(x)|| \leq k$$

Montrer que $f = Id + g$ est injective et que l'image réciproque par f d'une partie bornée de E est bornée.

Application : Montrer que le système d'équations

$$x = \frac{1}{2}\sin(x+y), \; y = \frac{1}{2}\cos(x-y)$$

admet au plus une solution.

Exercice 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et prenant ses valeurs dans un evn E. Soit $a \in I$. On suppose que f est dérivable sur I, et que $f''(a)$ existe. Montrer que la fonction g définie sur $I \times I$ par :

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} & \text{si} \quad x \neq y \\ f'(x) & \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

est différentiable au point (a,a) et que $Dg(a,a)(h,k) = \frac{h+k}{2} f''(a)$.

Exercice 3 Prolongement C^1

Soient E et F deux espaces de Banach, a un point de E, et $U = \{x \in E, \; 0 < ||x-a|| < R\}$. Soit f une application différentiable de U dans F telle que pour tout x dans $U, ||Df(x)|| \leq k$.

1. Montrer que si E est de dimension > 1 on a :

$$\forall (x,y) \in U^2, \; ||f(x) - f(y)|| \leq k||x-y||.$$

2. Montrer que f admet une limite α au point a.

3. On suppose que $Df(x)$ admet une limite $L \in \mathcal{L}(E,E)$ en a, et on prolonge f en posant $f(a) = \alpha$. Montrer que f est différentiable en a, et que $Df(a) = L$. L'application f ainsi prolongée est donc C^1.

Exercice 4 Soit $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et E l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^n$ muni de la norme infinie. On considère l'application $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\Phi(f) = \int_0^1 \phi(f(t))dt.$$

Montrer que l'application Φ est différentiable et calculer sa différentielle en tout point. L'application Φ est elle de classe C^1 ?

Exercice 5 Cas d'égalité dans les accroissements finis

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et F un espace de Banach. Soit $f : [a, b] \longrightarrow F$ une application continue sur $[a, b]$ et admettant sur $]a, b[$ une dérivée telle que $||f'(u)|| \leq 1$ pour tout u. On suppose que $||f(b) - f(a)|| = b - a$.

1. Montrer que $||f(v) - f(u)|| = v - u$ pour tout couple $(u, v) \in [a, b]^2$ avec $u \leq v$. En déduire que $||f'(u)|| = 1$ pour tout u.

2. On suppose de plus que la norme de F provient d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Montrer que

$$f(u) = f(a) + \frac{u - a}{b - a}(f(b) - f(a)).$$

Exercice 6 Un cas particulier du théorème de Sard

Soit f une application de classe C^1 d'un ouvert U de $\mathbb{R}^m$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ avec $m < n$.

1. Soit C un cube. Montrer qu'il existe $A > 0$ telle que l'image de tout cube $C' \subset C$ soit contenue dans une boule de rayon $A.l_{max}(C')$, avec $l_{max}(C')$ la longueur maximale des arrêtes.
2. Soit $C = [0, 1]^m$. Estimer la mesure de $f(C)$ en considérant une subdivision vérifiant $l_{max} = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}^*$. Conclure en faisant tendre k vers l'infini.
3. En déduire que la mesure de $f(U)$ est nulle.

Hint

1. *Indication exo 1,q2 :* Utiliser la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.
2. *Indication exo 3 :* Utiliser la fonction $\varphi(t) = f(t) - f(a) - (t - a)f'(a) - \frac{(t-a)^2}{2}f''(a)$ et le fait que f' est différentiable en a.
3. *Indication exo 3, q4 :* Considerer l'application définie par $g(x) = f(x) - L(x - a)$.
4. *Indication exo 5, q2 :* Exprimer $\langle f(b) - f(a), f(u) - f(a) \rangle$ a l'aide de la norme.