ENS Lyon **29 novembre 2010**
Département de Mathématiques **TD-6**
Calcul différentiel 1

Exercice 1

Soient U le plan privé de l'origine et

$$f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

Montrer que f est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de U, mais n'est pas un difféomorphisme global.
Expliciter des ouverts U et W, aussi grands que possible, tels que $f : U \to W$ soit un difféomorphisme global.

Exercice 2

Soit $f(x) = x + x^2 \sin(\frac{\pi}{x})$ si $x \neq 0, f(0) = 0$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, que $f'(0) \neq 0$, mais que f n'est inversible sur aucun voisinage de 0. Pourquoi le théorème d'inversion locale ne s'applique-t-il pas ici ?

Exercice 3

Soient k une constante strictement positive et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1, telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad ||f(x) - f(y)|| \geq k||x - y||$. On va montrer que f est alors un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

1. Montrer que f est injective, et que l'image $f(\mathbb{R}^n)$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$.

2. Montrer que la différentielle $Df(x)$ est inversible pour tout x.

3. Montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$. Conclure.

Exercice 4

Soit C l'ensemble des $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

1. Cette équation définit-elle y comme fonction implicite de x ? Lorsque c'est le cas, calculer la dérivée de la fonction implicite, et écrire l'équation de la tangente à C.

2. Dessiner C, et préciser l'asymptote. On pourra pour cela calculer l'intersection de C avec la droite $y = tx$ et en déduire une paramétrisation de C.

Exercice 5

On considère le système d'équations

$$x = \frac{1}{2}\sin(x+y) + t - 1,\ y = \frac{1}{2}\cos(x-y) - t + \frac{1}{2}$$

aux inconnues x et y.

1. Montrer que ce système admet une unique solution $(x(t), y(t))$ et que ces fonctions de t sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

2. Donner un développement limité à l'ordre deux de $x(t)$ et $y(t)$ au point $x = y = 0$.

3. Généralisation

   Soit $f : (x, \lambda) \mapsto f(x, \lambda)$ une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe k tel que, pour tous x, λ

   $$||\partial_1 f(x, y)|| \leq k < 1.$$

   Montrer que l'équation $f(x, \lambda) = x$ admet pour chaque λ une unique solution $x = x(\lambda)$, et que l'application $\lambda \mapsto x(\lambda)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^p$. Calculer $Dx(\lambda)$.