Exercice 1 Calcul.

1. Calculer la différentielle d'une application constante, linéaire et quadratique.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ différentiable. Montrer que les fonctions suivantes sont différentiables et déterminer leur différentielle :
$$u(x) = f(x, -x), \quad g(x, y) = f(y, x).$$
3. Soit $f_A(t) = e^{tA}$. Montrer que $f'_A(t) = Ae^{tA} = e^{tA}A$.
4. Montrer que $\forall t \in \forall A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \quad \det(e^{tA}) = e^{t\mathrm{Trace}(A)}$.

Exercice 2

Soit $(c^0(\mathbb{N}), N)$ l'espace vectoriel normé des suites convergeant vers 0 muni de la norme uniforme :
$$N((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$
En quels points la norme N est-elle différentiable ?

On pourra distinguer les cas suivants :
- $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ admet son maximum en un unique point.
- $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ admet son maximum en plusieurs points.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$.

Exercice 3

Soit E l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ muni de la norme de la convergence uniforme. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Monter que l'application suivante est différentiable :
$$\Phi : \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_0^1 \phi(f(x))\mathrm{d}x \end{cases}.$$
L'application Φ est-elle de classe C^1 ?

Exercice 4

Donner un exemple de fonction $f \in C^1(\Omega)$, avec Ω ouvert connexe, qu'il existe $a, b \in \Omega$ telle que :
$$\|f(a) - f(b)\| > \|a - b\| \sup_{x\in\Omega} \|\mathrm{d}f_x\|$$

Exercice 5 Formule d'Euler

Soit E, F deux espaces de Banach et $f : E \to F$, différentiable sur E telle que : $\forall x \in E$, $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(tx) = t^n f(x)$ Montrer que $\mathrm{d}f_x(x) = nf(x)$.

Exercice 6 Différentielle de l'exponentielle de matrice

1. Déterminer la différentiabilité en 0 de l'application exp : $\begin{cases} M_{n,n}(\mathbb{R}) \to M_{n,n}(\mathbb{R}) \\ A \mapsto e^A \end{cases}$.
2. Soit $X(t)$ un chemin de matrices C^1 et $f(t, s) = e^{sX(t)}$. Calculer la dérivée de $g_t(s) = e^{-sX(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t, s)$. En déduire que $\frac{\partial f}{\partial t}(t, 1) = \int_0^1 e^{(1-u)X(t)} X'(t)e^{uX(t)}\mathrm{d}u$.
3. Monter que $(\mathrm{d}\exp)_A(H) = \int_0^1 e^{(1-u)A} He^{uA}\mathrm{d}u$.

4. Soit $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel des matrices symétriques et $\mathcal{U}$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.
5. Montrer que $\mathcal{U}$ est un ouvert de S.
6. Montrer que pour $A \in \mathcal{U}$, il existe un unique $B \in \mathcal{U}$ tel que $A = B^2$. On note $B = \sqrt{A}$.
7. Montrer que $\psi : \begin{cases} \mathcal{U} \to \mathcal{U} \\ A \mapsto \sqrt{A} \end{cases}$ est différentiable.

Exercice 7

Étudier la différentiabilité des fonctions suivantes après les avoir prolongées par continuité en $(0,0)$:

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}, \quad g(x,y) = \frac{x^3 y}{x^4+y^2}$$

.

Soit $f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que si les dérivées partielles existent et que l'une est continue alors f est différentiable.

Exercice 8

Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convexe, montrer que f est différentiable sauf en un nombre dénombrable de points.