ENS Lyon **13 septembre 2010**
Département de Mathématiques **TD-1**
Calcul différentiel 1

Exercice 1 Calcul matriciel

1. Soit A une matrice à coefficients rationnels. Montrer que si elle admet une valeur propre rationnelle, alors elle admet également un vecteur propre à coefficients entiers.
2. Déterminer les classes de similitudes de $\mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, cést-à-dire les orbites de l'action de groupe $\begin{cases} GL_{2,2}(\mathbb{R}), M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R}) \\ (P, A) \mapsto P^{-1}AP \end{cases}$.
3. Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle $X'' + cX = 0$, avec $c \in \mathbb{R}$.
4. Résoudre l'équation $X^2 = A$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
5. Calculer l'exponentielle de $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Résoudre $X^2 = J$.

Exercice 2 Dualité

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur K. Monter que $f, g \in E^* - \{0\}$ (E^* dual de E) ont le même noyau si et seulement si elles sont proportionnelles.
2. Soient $f_1, f_2, \dots, f_p \in E^*$ tels que :

$$\forall x \in E \quad f_1(x) = \ldots = f_p(x) = 0 \Rightarrow g(x) = 0$$

   Montrer que $g \in \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_p)$.

Exercice 3 Équivalences de normes

Soit $x \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

Exercice 4 Normes subordonnées

1. Soit E et F des espaces de Banach. Montrer que l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires bornées de E dans F, est un espace de Banach pour la norme subordonnée définie par :
   $|||f||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$
2. Soit $|||A|||_k = \sup_{x \neq 0} \frac{|||Ax|||_k}{|||x|||_k}$, pour $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Montrer pour $A \in M_n(\mathbb{R})$ que :
   $|||A|||_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$
   $|||A|||_2 = \sup\{|\lambda|, \lambda \text{ valeur propre de } AA^*\}$
   $|||A|||_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$
   (On majorera d'abord $\|Ax\|$ pour majorer la norme subordonnée. On prendra ensuite un vecteur bien choisi pour la minorer)
3. Quelle est la norme de l'application linéaire $g : (\mathbb{R}^3, \|.\|_\infty) \to (\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$ dont la matrice est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

Déterminer les différentielles des fonctions suivantes :

$$\begin{cases} GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}) \\ A \mapsto A^{-1} \end{cases}, \begin{cases} M_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto \det(A) \end{cases}, \begin{cases} M_{n,n}(\mathbb{R}) \to M_{n,n}(\mathbb{R}) \\ A \mapsto e^A \end{cases}.$$

Exercice 6

Quels sont les triangles circonscrits à un cercle d'aire maximale ?

Exercice 7

Soit f, g deux endomorphismes de E tels que $fg - gf = Id$. Montrer que E est de dimension infinie et que f et g sont non bornés, quelque soit la norme choisie pour E.

Exercice 8 Dénombrabilité

Soit f une fonction croissante sur $[0, 1]$. Montrer que les points de discontinuités f (points où f n'est pas continue) forment un ensemble dénombrable ou fini.

Exercice 9 Densité

On considère l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ \frac{1}{|q|} \text{ si } x = \frac{p}{q} \text{ et } \mathrm{pgcd}(p,q) = 1 \end{cases} \end{cases}$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et discontinue sur le reste de l'ensemble.