ENS Lyon — Analyse Complexe
L3 — 2007-2008

Examen Partiel
12 mars 2008

Durée : 2h. Aucun document autorisé. Toute réponse doit être soigneusement justifiée.

Question de cours

Démontrer le théorème de Weierstrass : soit U un ouvert et $f_n : U \to \mathbb{C}$ des fonctions holomorphes, telles que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur tout compact. Alors f est holomorphe, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite des dérivées k-èmes $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact vers $f^{(k)}$.

Dans tout ce qui suit, les résultats du cours peuvent êtres utilisés sans démonstration, mais doivent être énoncés en détail.

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes en utilisant des méthodes d'analyse complexe :

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\ dx}{(1+x^2)^2}$
2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)^2}$

Exercice 2

Soit U un ouvert connexe, et $f, g : U \to \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes. Montrer que si $f\overline{g}$ est holomorphe, alors g est constante ou $f \equiv 0$.

Exercice 3

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, holomorphe sur U.

1. Montrer que si U est borné, alors $|f(z)| \leq \sup_{w\in\partial U} |f(w)|$. Que se passe-t-il si $|f(z_0)| = \sup_{w\in\partial U} |f(w)|$ pour un $z_0 \in U$?

Dans la suite, on s'intéressera à certains cas où $U \subsetneq \mathbb{C}$ n'est *pas borné*. On suppose que $|f(z)| \leq 1$ sur ∂U et qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f(z)| \leq M$ sur U. Il s'agit de montrer qu'alors $|f|$ est bornée par 1 sur tout U.

2. Dans cette question on prend $U = \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Re}\ z > 0\}$. Fixons $N \in \mathbb{N}$ et soit $h(z) = \dfrac{f(z)^N}{z+1}$ pour $z \in U$. Majorer h sur le bord du demi-disque $\{z \in U : |z| \leq R\}$ puis sur U, et conclure. Donner un exemple d'une fonction holomorphe sur U, bornée sur ∂U mais non bornée sur U.

Dans la suite, $U \subsetneq \mathbb{C}$ est un ouvert quelconque.

3. Fixons $a \in U$, et définissons $g(z) = \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a}$. Montrer que g s'étend en une fonction holomorphe sur U, et qu'il existe un $K > 0$ tel que $|g(z)| \leq K$ pour $z \in \overline{U}$.

4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On pose $h(z) = f(z)^N g(z)$ pour $z \in \overline{U}$. Montrer que pour R assez grand, $|h(z)| \leq K$ sur le bord de $\{z \in U : |z| \leq R\}$.

5. Montrer que si $z \in U$ et $g(z) \neq 0$, alors $|f(z)| \leq 1$ et conclure.