TD 7

Exercice 1 [Zéros de la fonction ζ sur $\mathrm{Re}\, s = 1$]

Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}\, s > 1$. Vérifier que $\log \zeta(s)$ est bien défini, et vaut $\sum_{p \text{ premier}} \sum_{k \geq 1} 1/(kp^{ks})$.

Vérifier que pour tout réel x, on a $\cos 2x + 4\cos x + 3 \geq 0$

En déduire que pour tout $s = \sigma + i\tau$ avec $\sigma > 1$, on a $|\zeta(\sigma)^3 \zeta(\sigma+i\tau)^4 \zeta(\sigma+2i\tau)| \geq 1$.

En déduire que ζ ne s'annule pas sur $\mathrm{Re}\, s = 1$.

Exercice 2 [Une application de la fonction ζ]

Montrer que $\log \zeta(s)/\log(s-1)$ tend vers 1 quand $s \to 1$, $\mathrm{Re}\, s > 1$.

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Si $A \subset \mathcal{P}$, on dit que A est de densité λ si $\lim_{s \to 1, \mathrm{Re}\, s > 1} (\sum_{p \in A} 1/p^s)/\log(s-1)$ existe et vaut λ. Vérifier que $\mathcal{P}$ est de densité 1.

Soit χ l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $\chi(n) = 0$ si n est pair, $\chi(n) = 1$ si $n = 1 \pmod 4$, et $\chi(n) = -1$ si $n = 3 \pmod 4$. On pose $L(s) = \sum_{n \geq 1} \chi(n)/n^s$. Montrer que cette formule définit une fonction holomorphe sur le demi-plan $\mathrm{Re}\, s > 0$, et que $L(1) \neq 0$. Vérifier que si $\mathrm{Re}\, s > 1$, alors $L(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1}$.

Exprimer $\zeta(s)L(s)$ et $\zeta(s)/L(s)$ sous forme d'un produit pour $s > 1$. En déduire que l'ensemble des nombres premiers égaux à 1 modulo 4 et l'ensemble des nombres premiers égaux à 3 modulo 4 sont tous les deux de densité 1/2.

Exercice 3 Soit $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$, et $g(z) = 1/z + 2z \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z^2 - n^2}$. Montrer que ces deux fonctions sont définies et holomorphes sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Posons $F(z) = f(z) - \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2$. Montrer que F s'étend en une fonction entière et 1-périodique. Montrer que F est bornée sur la bande $\{0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1\}$ (on raisonnera séparément sur $|\mathrm{Im} z| \leq 1$ et $|\mathrm{Im} z| \geq 1$). En déduire que F est constante, puis que F est nulle.

Montrer que $g'(z) = f(z)$. En déduire que $g(z) = \pi \mathrm{cotan} \pi z$.

Exercice 4 Soit $F = P/Q$ une fraction rationnelle sans pôle entier, et telle que $\deg Q \geq \deg P + 2$. Soit R_n le carré de sommets $(\pm(n+1/2), \pm(n+1/2))$. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \int_{\partial R_n} \frac{F(z)}{\tan \pi z} dz = \lim_{n \to +\infty} \int_{\partial R_n} \frac{F(z)}{\sin \pi z} dz = 0$.

Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des pôles de F. Montrer que :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) = -\sum_{p \in \mathcal{P}} \mathrm{Res}\left(\frac{F(z)}{\tan \pi z}, p\right)$$

et

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n F(n) = -\sum_{p \in \mathcal{P}} \mathrm{Res}\left(\frac{F(z)}{\sin \pi z}, p\right)$$

Calculer $\sum_{n \in \mathbb{Z}} 1/(n^2 + a^2)$, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n/(n^2 + a^2)$ $(0 < a < 1)$, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} 1/(n^2 - a)$, $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, $\sum_{n \geq 1} 1/n^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 Soit $A < B$ deux réels, et $\mathcal{B}$ la bande $\{A < \operatorname{Re} z < B\}$. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathcal{B}$. Pour tout $x \in]A, B[$, on pose $M(x) = \sup_{\operatorname{Re} z = x} |f(z)|$. Soit a, b tels que $A < a < b < B$. On suppose que f est bornée sur $\{a \leq \operatorname{Re} z \leq b\}$, et $M(a) = M(b)$. Montrer qu'alors $M(x) \leq M(a)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Exercice 6 Soit r et r' deux réels > 1. On note C et C' les deux couronnes $\{1 < |z| < r\}$ et $\{1 < |z| < r'\}$. On cherche à savoir à quelle condition il existe un biholomorphisme entre C et C'.

Soit donc f un biholomorphisme entre C et C'.

Montrer que $|f(z)| \to 1$ quand $|z| \to 1$, ou $|f(z)| \to r'$ quand $|z| \to 1$. Montrer qu'on peut supposer qu'on est dans le premier cas.

Posons $a = (\log r' / \log r)$, et posons $g(z) = \log |f(z)| - a \log |z|$. Montrer que g est harmonique sur C et se prolonge par continuité à $\bar{C}$. Montrer que $g = 0$.

Montrer que $f'/f = a/z$, puis que $a = 1$.