ENS Lyon
L3

Analyse Complexe
2007-2008

TD 2 : Classiques

Exercice 1. *Petit calcul.*

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert $D \subset \mathbb{C}$. Vérifier que

$$\frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{Re} f(z)) = \frac{f'(z)}{2},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(|f(z)|) = \frac{f'(z)|f(z)|}{2f(z)}, \qquad f(z) \neq 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}(|f(z)|^2) = |f'(z)|^2.$$

Exercice 2. *Fonctions harmoniques*

Montrer que toute fonction harmonique d'un disque ouvert D dans $\mathbb{R}$ s'écrit comme la partie réelle d'une fonction holomorphe.

Exercice 3. *Autour du logarithme complexe.*

Une fonction f est un logarithme sur une partie de $\mathbb{C}$ si elle vérifie $\exp \circ f = id$ sur cette partie.

1. Montrer qu'il n'existe pas de fonction logarithme continue sur le cercle unité.
2. Montrer que si f est un logarithme sur un ouvert de $\mathbb{C}$ alors elle est holomorphe et $f'(z) = 1/z$. Réciproquement, montrer que toute fonction holomorphe sur un ouvert connexe U, de dérivée $1/z$, est un logarithme sur U.
3. Montrer qu'on peut définir une fonction logarithme sur $\mathbb{C}$ privé d'une demi-droite issue de 0 quelquonque. On appelle détermination principale la branche du Log définie sur $\mathbb{C}$ privé de $]-\infty; 0]$. Calculer l'expression explicite de $\log(re^{it})$ (pour re^{it} dans $\mathbb{C} \backslash]-\infty; 0]$).
4. Montrer que la détermination principale du logarithme est développable en série entière autour de 1 et $Log(1+z) = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$.
5. Soit f une fonction holomorphe sur un disque D et n un entier strictement positif. Montrer que si f ne s'annule pas alors il existe des fonctions holomorphes g et h sur D qui vérifient $e^g = f$ et $h^n = f$.
6. Montrer qu'il n'existe pas de fonction f holomorphe sur $\mathbb{C}$ vérifiant $f \circ f = \exp$. Montrer d'abord que l'on peut relever f.

Exercice 4. *Lemme de Schwarz*

Soit f une fonction holomorphe de $D(0,1)$ dans $\overline{D(0,1)}$. On suppose que $f(0)=0$.

Montrer que pour tout z dans $D(0,1)$: $|f(z)| \leq |z|$ et $|f'(0)| \leq 1$.

Montrer que s'il existe $z_0 \neq 0$ dans $D(0,1)$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$ ou si $|f'(0)| = 1$, alors $f(z) = cz$ sur $D(0,1)$ avec $|c| = 1$.

Exercice 5. *Calcul d'intégrale*

Calculer les intégrales suivantes.

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z}\, dz \quad \text{où} \quad \gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi],$$
$$\int_\gamma \frac{\cos z^2}{z}\, dz \quad \text{où} \quad \gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi],$$
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx, \text{ on pourra utiliser la fonction } e^{iz}/z$$

Exercice 6. *Pour l'avenir*

Soit f et g deux fonctions holomorphes dans un ouvert contenant $\overline{D(0,1)}$. On suppose que f a au moins un zéro dans $D(0,1)$, g est sans zéro dans $D(0,1)$ et $|f| = |g|$ sur $\partial D(0,1)$. Montrer que $|f| < |g|$ sur $D(0,1)$.

Exercice 7. *Un peu de rab*

Montrer qu'une série entière admet au moins un point singulier sur son disque de convergence.