ENS Lyon L3

Analyse Complexe 2007-2008

TD 1 : Séries entières - Dérivabilité complexe

Exercice 1. *Règle d'Hadamard*

Montrer que le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$ est donné par $\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

Exercice 2. *Changement d'origine*

Montrer que si f est la somme d'une série entière de rayon de convergence R, et si $|z_0| < R$, alors $g : z \mapsto f(z_0 + z)$ est développable en série entière sur le disque $D(0, R - |z_0|)$.

Exercice 3. *Formule de Cauchy*

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence infini.

1. Montrer que pour tout $r > 0$,
$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^n e^{in\theta}} \mathrm{d}\theta.$$
2. On suppose qu'il existe $R > 0$ et $P \in \mathbb{R}_d[X]$ tels que pour $|z| > R$ on ait $|f(z)| < P(|z|)$. Montrer que f est un polynôme de degré au plus d.
3. En déduire que si, pour tout $z \in \mathbb{C}$, f vérifie $f(z+1) = f(z)$ et $f(z+i) = f(z)$, alors f est constante.

Exercice 4. *Principe du maximum*

Soit f la somme d'une série entière de rayon de convergence R. On dit que f admet un *maximum local en* a s'il existe $r > 0$ tel que $D(a, r) \subset D(0, R)$ et pour tout $z \in D(a, r)$, $|f(z)| \leq |f(a)|$.

1. Montrer que si f est non constante, elle n'admet pas de maximum local.
2. En déduire le théorème de d'Alembert-Gauss (tout polynôme complexe non constant admet une racine).

Exercice 5. *Principe des zéros isolés*

Soit $(\alpha_k)_k$ une suite de nombres complexes convergeant vers 0. Trouver les séries entières f telles que $f(\alpha_k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6. *Fonction exponentielle*

On définit la fonction exponentielle sur $\mathbb{C}$ par : $\exp z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

1. a. Rappeler pourquoi exp est bien définie sur $\mathbb{C}$ et vérifier : $\overline{\exp z} = \exp \bar{z}$.
   b. En considérant $\exp(tz)$ comme une série entière en t, démontrer la relation :
$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \; \exp(z + z') = \exp z \exp z'.$$
   c. En déduire : $|\exp(z)| = e^{Re z}$ et $(\exp(z))^{-1} = \exp(-z)$.
2. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Montrer que $\dfrac{\exp(z) - \exp(z_0)}{z - z_0}$ admet une limite quand $z \underset{\neq}{\longrightarrow} z_0$ et la calculer.
3. Dessiner l'image par exp d'une droite de partie réelle (resp. imaginaire) constante.

Exercice 7. *Dérivabilité complexe*

1. Montrer que la fonction $f : z \mapsto \bar{z}$ n'est $\mathbb{C}$-dérivable nulle part, mais que f vue comme une application sur $\mathbb{R}^2$ est différentiable partout.
2. En quels points $z \mapsto \bar{z}^2$ est-elle $\mathbb{C}$-dérivable ?
3. Soit f une fonction holomorphe sur le disque $D(0, r)$. Montrer que la fonction $z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$ est aussi holomorphe sur $D(0, r)$. En quels point $z \mapsto \overline{f(z)}$ est-elle $\mathbb{C}$-dérivable ?
4. Vérifier que la fonction $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ satisfait les équations de Cauchy-Riemann en 0 mais n'est pas $\mathbb{C}$-dérivable en 0.
5. Les fonctions $|z|^2$, $\dfrac{z^3}{\bar{z}}$ sont-elles différentiables sur leur domaine ? holomorphes ?
6. Trouver toutes les fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ dont la partie réelle est donnée par $(x, y) \mapsto 2xy$.

Exercice 8. *Caractérisations des fonctions holomorphes constantes*

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe non vide D de $\mathbb{C}$. Montrer que les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

i) f est constante ; ii) $\mathrm{Re}\, f$ est constante ;
iii) $\mathrm{Im}\, f$ est constante ; iv) $|f|$ est constante.

Exercice 9. *Fonctions harmoniques*

Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Une fonction $u : D \to \mathbb{R}$ est *harmonique* si elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

1. Soit $f = u + iv$ une fonction holomorphe sur D. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que u et v sont harmoniques sur D.
2. Démontrer que si la fonction u est harmonique sur D, la fonction f définie par $f(x, y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x, y) - i \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, y)$ est holomorphe sur D.