ENS Lyon
L3

Analyse Complexe
2007-2008

TD 4 : Fonctions Γ, Fonctions harmonique

Exercice 1. *Fonction* Γ.

On rappelle que la fonction Γ d'Euler est définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt.$$

Montrer que Γ est bien définie et holomorphe sur le demi-plan $\mathrm{Re}(z > 0)$. Montrer que, sur ce demi-plan,

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n} + \int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}dt.$$

En déduire que Γ se prolonge en fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$.

Exercice 2. *Fonctions harmoniques.*

1. Soient u, $v : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fonctions harmoniques non constantes, où Ω est un ouvert connexe.
   (a) Montrer que u^2 ne peut jamais être harmonique. Pour quelles fonctions holomorphes $f : \Omega \to \mathbb{C}$ a-t-on que $|f|^2$ est harmonique ?
   (b) Montrer que uv est harmonique si et seulement s'il existe une constante $C \in \mathbb{R}^*$ telle que $u + iCv$ est holomorphe.
2. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe qui ne s'annule pas. Montrer que $\ln|f|$ est une fonction harmonique sur Ω, en calculant son Laplacien. Trouver aussi une preuve plus rapide.
3. Montrer qu'une fonction continue $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est harmonique si et seulement si elle satisfait la propriété de la moyenne sur les disques :
$$u(a) = \frac{1}{\pi r^2}\int_{\overline{D}(a,r)} u \; dxdy$$
   pour tout $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$.
4. Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique.
   (a) Soit $a \in \Omega$ tel que $u(a) = 0$. Montrer que pour tout disque $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$, on a $\sup_{\partial D} u \geq 0$ et $\inf_{\partial D} u \leq 0$.
   (b) Montrer que u n'a aucun zéro isolé.

5. Soit u une fonction harmonique positive dans D.
   (a) Montrer que pour $0 < r < 1$ et $|h| = 1$, on a $|u(rh) - u(0)| \leq \frac{2r}{1-r} u(0)$. En déduire que
   $$|\nabla u(a)| \leq 2u(0).$$
   (b) Redémontrer cette inégalité en dérivant la formule de Poisson.
   (c) Montrer que pour tout $a \in D$, on a
   $$|\nabla u(a)| \leq \frac{2}{1-|a|^2} u(a).$$
6. Soit $U \in \mathbb{C}$ un ouvert connexe, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On suppose que la suite $u_n = \mathrm{Re}(\ f_n)$ converge uniformément sur tout compact de U, et que $\{f_n(z_0)\}$ converge pour un certain $z_0 \in U$. Montrer qu'alors f_n converge uniformément sur tout compact de U.
7. (formule de Poisson dans le demi-plan supérieur)
   (a) Montrer que l'homographie $\Phi(w) = i\frac{1+w}{1-w}$ envoie le disque unité D sur le demi-plan supérieur $U = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$ et ∂D sur $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
   (b) Calculer l'image par Φ de la mesure de Lebesgue sur ∂D, ainsi que $P_D(\Phi^{-1}(z), \Phi^{-1}(t))$, $(z, t) \in U \times \mathbb{R}$ (P_D est le noyau de Poisson du disque unité).
   (c) Soit $f : \overline{U} \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique dans U, continue sur $\overline{U}$, admettant une limite en ∞. Montrer que pour $z = x + iy \in U$ on peut écrire
   $$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{y^2 + (x-t)^2} f(t)\, dt.$$

Exercice 3. *Automorphisme du disque.*

(Automorphismes du disque unité) On note D le disque unité (ouvert) de $\mathbb{C}$. Pour tout $a \in D$ on note
$$\phi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$
Montrer que ϕ_a est un automorphisme de D (une bijection holomorphe de D dans D dont l'inverse est aussi holomorphe). Pour tout réel t, on note $r_t : z \mapsto e^{it} z$. Montrer que tous les automorphismes de D sont de la forme $r_t \circ \phi_a$.

Exercice 4. *lemme de Schwarz-Pick.*

Soit $f : D \to D$ une fonction holomorphe et $z_1, z_2 \in D$. Montrer que
$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - f(z_1)\overline{f(z_2)}} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - z_1 \overline{z_2}} \right|$$
et
$$|f'(z)| \leq \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}.$$