ENS Lyon | Analyse Complexe
L3 | 2007-2008

Examen
7 mai 2008

Durée : 3h. Aucun document autorisé. Toute réponse doit être soigneusement justifiée.

Dans toute la suite, D désignera le disque unité $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

1. On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions holomorphes $f : D \to \mathbb{C}$ telles que $|f(z)| < 1$ pour tout $z \in D$ et $f(0) = \frac{1}{2}$. Calculer $\sup_{f \in \mathcal{E}} |f'(0)|$, et montrer qu'il est atteint par un élément de $\mathcal{E}$. Décrire le plus spécifiquement possible les éléments de $\mathcal{E}$ qui maximisent $|f'(0)|$.
2. Soit U un ouvert connexe qui contient un disque fermé $\overline{D}(a, r)$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $|f|$ est constante sur $\partial D(a, r)$. Montrer que f a au moins un zéro dans D.
   Indication : pour un $z_0 \in D$ fixé, on pourra considérer la fonction $g(z) = f(z) - f(z_0)$.
3. Soit U un ouvert contenant 0, et $f : U \setminus Z \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, où $Z = \{z_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ et $z_n \to 0$ quand $n \to \infty$. On suppose que f a un pôle en chaque z_n (noter que la singularité de f en 0 n'est alors pas isolée).
   Montrer que $f(U)$ est dense dans $\mathbb{C}$. *Indication : supposer, comme dans la preuve du théorème de Casatori-Weierstrass que $|f(z) - w| > \delta$ et considérer la fonction $g(z) = 1/(f(z) - w)$.*
4. On considère la fonction méromorphe $f(z) = \dfrac{e^{i\pi z^2}}{\sin \pi z}$ sur $\mathbb{C}$. Calculer l'intégrale de f sur le bord du parallélogramme de sommets $\pm Re^{i\pi/4} \pm \frac{1}{2}$ et en déduire $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$.
5. Soit $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, sur lequel on note L la détermination du logarithme qui vérifie $L(1) = 0$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note $u^{-z} = e^{-zL(u)}$.
   Pour $0 < \alpha < \pi/2$ et $r > 0$, on considère le chemin $\gamma_{\alpha,r}$ défini par concaténation des chemins $t \mapsto te^{i\alpha}$, $t \in]-\infty, -r]$; $t \mapsto re^{it}$, $t \in [\alpha - \pi, \pi - \alpha]$; $t \mapsto te^{i(\pi-\alpha)}$, $t \in [r, +\infty[$.
   (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\gamma_{\alpha,r}} u^{-z} e^u\, du$ définit une fonction entière, notée $F_{\alpha,r}(z)$.
   (b) Montrer que $F_{\alpha,r}$ ne dépend pas de α ($0 < \alpha < \pi/2$), ni de de $r > 0$.
   (c) Montrer que si $\mathfrak{Re}(1 - z) > 0$, alors $F_{\alpha,r}(z) = 2i \sin(\pi z) \displaystyle\int_0^{\infty} t^{-z} e^{-t}\, dt$.
   (d) En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$,
   $$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\alpha,r}} u^{-z} e^u\, du$$