

## Nombres complexes (rappels)

**Exercice 1 (Écriture plate)** Mettre sous la forme  $a + ib$ , ( $a, b \in \mathbb{R}$ ), les nombres complexes suivants.

1.  $e^{-i\frac{\pi}{2}}$

2.  $2e^{i\frac{\pi}{4}}$

3.  $e^{i\frac{2\pi}{3}}$

4.  $e^{ik\pi}$  (où  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ )

5.  $\frac{6 - 4i}{-1 + i}$

6.  $\frac{i}{-1 + i\sqrt{3}}$

7.  $\frac{1}{x + iy}$

**Exercice 2 (Écriture polaire)** Mettre sous la forme  $re^{i\theta}$  ( $r$  est le module,  $\theta$  est l'argument calculé dans l'intervalle  $(-\pi, +\pi]$ ) et représenter dans le plan complexe les nombres complexes suivants.

1.  $-1$

2.  $i$

3.  $1 + i\sqrt{3}$

4.  $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

5.  $\frac{2 + 2i\sqrt{3}}{-\sqrt{3} + i}$

**Exercice 3** Calculer et représenter dans le plan complexe :

1. les deux racines carrées de  $-i$

2. les trois racines cubiques de 1

3. les trois racines cubiques de  $i$

4. les quatre racines quatrièmes de  $-1$

**Exercice 4** Quelles sont les courbes du plan complexe définies par les équations suivantes. Représenter ces courbes dans le plan complexe.

1.  $\operatorname{Re}(z) = 1$

2.  $|z + 1| = \sqrt{2}$

3.  $\operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}$

4.  $|z - i| = |z + i|$

5.  $|z - 3i| + |z + 3i| = 10$

6.  $|z - (1 + i)| - |z + (1 + i)| = 2$

**Exercice 5** Quelles sont les courbes du plan complexe définies par les équations paramétriques suivantes. Représenter ces courbes dans le plan complexe, et indiquer par une flèche le sens de parcours correspondant aux valeurs croissantes du paramètre  $t$ .

1.  $z = 1 + it, (t \in \mathbb{R})$

2.  $z = e^{-it}, (t \in \mathbb{R})$

3.  $z = 2e^{it} - 1, (t \in \mathbb{R})$

4.  $z = t + it^2, (t \in \mathbb{R})$

5.  $z = 2 \cos t - i \sin t, (t \in \mathbb{R})$

6.  $z = e^t + ie^{-t}, (t \in \mathbb{R})$

**Exercice 6** Quelles sont les régions du plan complexe définies par les inégalités suivantes. Représenter ces régions dans le plan complexe.

1.  $\text{Im}(z) > 2$

2.  $|z - 2| > \sqrt{5}$

3.  $1 \leq |z - 2i| \leq 2$

4.  $0 < \text{Arg}(z^2) < \frac{\pi}{2}$

5.  $|z + 2i| \leq |z + 4i|$

6.  $|z - 1| + |z + 1| < 4$