ULB **Exercices 3** **S6, 2013/2014**

MATHF214, Compléments de Mathématiques

Assistants : S. Dendievel, R. Nascimento Titulaire : Th. Gallouët

---

Exercice 1 (Produit scalaire) *Soit* $f, g \in C^1PM([-1,1];\mathbb{C})$*, on rappelle la formule du produit scalaire* $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{+1} f(x)\overline{g(x)}dx$*. Calculez le produit scalaire des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = \cos(5\pi x)$ *et* $g(x) = 1$;
2. $f(x) = \cos(\pi x)$ *et* $g(x) = \cos(3\pi x)$;
3. $f(x) = \cos(k\pi x)$ *et* $g(x) = \cos(l\pi x)$*, (*$k, l \in \mathbb{N}$*) ;*
4. $f(x) = \sin(k\pi x)$ *et* $g(x) = \sin(l\pi x)$*, (*$k, l \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$*) ;*
5. $f(x) = e^{i2\pi x}$ *et* $g(x) = e^{-i5\pi x}$;
6. $f(x) = e^{i7\pi x}$ *et* $g(x) = e^{i7\pi x}$;
7. $f(x) = e^{ik\pi x}$ *et* $g(x) = e^{il\pi x}$*, (*$k, l \in \mathbb{Z}$*) .*

Exercice 2 (Série de Fourier) *Déterminer la série de Fourier sous forme réelle des fonctions suivantes, définies sur* $[-\pi, \pi]$*, par*

1. $f(x) = x,$
2. $f(x) = |x|,$
3. $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{pour } -\pi \leq x < 0, \\ 1, & \text{pour } 0 < x \leq \pi, \\ 0, & \text{pour } x = 0, \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pour } -\pi \leq x < 0, \\ x, & \text{pour } 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}$
5. $f(x) = \begin{cases} \pi + x & \text{pour } -\pi < x < 0, \\ x, & \text{pour } 0 < x \leq \pi, \\ 0, & \text{pour } x = 0, \end{cases}$
6. $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi + x}{2}, & \text{pour } -\pi \leq x < 0, \\ \dfrac{\pi - x}{2}, & \text{pour } 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}$
7. $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{pour } -\pi \leq x < 0, \\ x, & \text{pour } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

Déterminer sous forme réelle et sous forme complexe la série de Fourier des fonctions suivantes. Donnez le domaine sur lequel f *est égale à sa série de Fourier.*

1. $f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{pour } -\pi \leq x \leq 0, \\ \sin x, & \textit{pour } 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}$
2. $f(x) = x^2$, *pour* $-\pi \leq x \leq \pi$.

Exercice 3 (Base orthonormée ?) *Dans l'espace* $C^1PM([-\pi, +\pi]; \mathbb{R})$*, on considère les fonctions*

$$\varphi_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \qquad (\textit{où } n = 1, 2, 3, \ldots)$$

1. *Montrer que ces fonctions forment un système orthonormé de l'espace* $C^1PM([-\pi, +\pi]; \mathbb{R})$
2. *Calculer les composantes de la fonction* $f(x) = \sin(x + \alpha)$ *dans ce système orthonormé.*
3. *En déduire que ce système orthonormé n'est pas complet.*

Exercice 4 (Orthonormalisation) *Dans l'espace* $C^1PM([-\pi, +\pi]; \mathbb{R})$*, on considère les polynômes*

$$f_0(x) = a_{00}, \qquad f_1(x) = a_{10} + a_{11}x, \qquad f_2(x) = a_{20} + a_{21}x + a_{22}x^2$$

Déterminer les coefficients $a_{00}, a_{10}, a_{11}, a_{20}, a_{21}, a_{22}$ *de manière à ce que ces fonctions soient orthonormés.*

Exercice 5 (Classique) *Dans l'espace* $C^1PM([-\pi, +\pi]; \mathbb{R})$*, calculer les composantes de la fonction* $f(x) = |x|$ *dans le système orthonormé complet*

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \qquad (\textit{où } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots).$$

1. *Ecrire le développement en série de la fonction* f *dans ce système orthonormé complet (forme complexe de la série de Fourier).*
2. *En déduire le développement de* f *en série des fonctions* $\cos kx$ *et* $\sin kx$ *(forme réelle de la série de Fourier).*
3. *Ecrire l'égalité de Parseval.*

Exercice 6 (applications) *Déterminer les solutions* 2π *périodiques de l'équation différentielle*

$$u''(x) + e^{ix}u(x) = 0.$$