ULB **Exercices 6** **S9, 2013/2014**
MATHF214, Compléments de Mathématiques
Assistants : S. Dendievel, R. Nascimento Titulaire : Th. Gallouët

---

Exercice 1 *Montrer que*

1. $H(t)e^{-at}\cos\omega t \sqsupset \dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$, $Re(s+a)>0, \omega\in\mathbb{R}$;
2. $H(t)e^{-at}\dfrac{\sin\omega t}{\omega} \sqsupset \dfrac{1}{(s+a)^2+\omega^2}$, $Re(s+a)>0, \omega\in\mathbb{R}_0$;
3. *A partir de ces résultats, retrouver les transformées de Laplace des fonctions :*
   a) $H(t)$;
   b) $H(t)t$
   c) $H(t)e^{-at}$;
   d) $H(t)te^{-at}$;
   e) $H(t)\sin t$;
   f) $H(t)\cos t$;
   g) $H(t)\sin\omega t$;
   h) $H(t)\cos\omega t$;
   en considérant des cas particulièrs pour a *et* ω.

Exercice 2 *Déterminer l'original de la fonction* ϕ *donnée par*

$$\phi(s)=\frac{1}{1+s^3}$$

en faisant une décomposition en fraction simples de $\phi(s)$ *dans* $\mathbb{R}$.

Exercice 3 *Vérifier, au moyen de transformée de Laplace, que*
a)

$$H(t)e^{-at}*H(t)e^{-bt}=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}H(t)(e^{-at}-e^{-bt}), & si\ b\neq a,\\ H(t)te^{-at}, & si\ b=a.\end{cases}$$

b) $H(t)\sin t * H(t)\cos t=\dfrac{1}{2}H(t)t\sin t$;
c) $H(t)te^{-t}*H(t)e^{-2t}=H(t)(e^{-2t}-e^{-t}+te^{-t})$;

Exercice 4 *Déterminer l'original de la fonction* ϕ *définie par*

$$\phi(s)=\frac{s^3+2s^2+3s+3}{s^4+s^3+3s^2+2s+2}$$

au moyen de décomposition en fonctions simples et des tables de transformées de Laplace.

Exercice 5 *Calculer la transformée de Laplace de la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{si } 0 < t < 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 6 *Déterminer l'original de la fonction* $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *définie par*

$$\phi(s) = \frac{s}{s^2 + \pi^2}(1 + e^{-s}).$$

Exercice 7 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction ayant*

$$\phi(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)[(s + 1)^2 + 2]},$$

$Re(s) > 0$, pour transformée de Laplace. Déterminer ϕ sous forme dans produit de convolution.