Fonctions d'une variable complexe

Exercice 1 ($\mathbb{C}$-dérivabilité) *Parmi les fonctions suivantes de la variable complexe $z = x + iy$, déterminer quelles sont les fonctions holomorphes et préciser le domaine où elles sont holomorphes.*

1. $f(z) = \dfrac{z}{z^2+9}$;
2. $f(z) = z|z|^2$;
3. $f(z) = x^2 + iy^2$;
4. $f(z) = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$;
5. $f(z) = e^y e^{ix}$;
6. $f(z) = e^{-y} e^{ix}$;
7. $f(z) = ln(z-i)$.

Exercice 2 (Calcul d'intégrales I) *Calculer les inégrales complexes suivantes. Commencez toujours par un dessin !*

1. $\displaystyle\int_C z^2\, dz$ *où*
   a) *C est la portion de parabole $z = t^2 + it$, où $t \in [-1, 1]$;*
   b) *C est le segment de droite allant du point $1-i$ au point $1+i$.*
2. $\displaystyle\int_C (y - x - 3ix^2)\, dz$ *où*
   a) *C est la portion de parabole $z = t^2 + it$ où $t \in [0, 1]$;*
   b) *C est constitué d'un segment de droite allant du point $z = 0$ au point $z = i$, et d'un segment de droite allant du point $z = i$ au point $z = 1 + i$.*
3. $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z-z_0)^n}$ *où $n \in \mathbb{N}$ et C est le cercle $|z - z_0| = R$ parcouru une fois dans le sens trigonométrique positif.*
4. $\displaystyle\int_C \overline{z}\, dz$ *où C est le cercle $|z| = R$ parcouru une fois dans le sens trigonométrique positif.*

5. *Soit*

$$f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{i\frac{arg\ z}{2}},$$

où $-\pi < arg\ z \leq +\pi$, *la branche principale de la racine carrée de* z. *Calculer l'intégrale*

$$\int_C f(z)\,dz$$

où

a) C *est le cercle* $|z| = R$ *parcouru une fois dans le sens trigonométrique positif;*

b) C *est le chemin fermé constitué comme suit :*
   - *le segment allant du point* 1 *au point* 4 *de l'axe réel;*
   - *le quart de cercle* $|z| = 4$ *où* $0 \leq arg\ z \leq \frac{\pi}{2}$ *;*
   - *le segment allant du point* $4i$ *au point* i *de l'axe imaginaire;*
   - *le quart de cercle* $|z| = 1$ *où* $0 \leq arg\ z \leq \frac{\pi}{2}$.

Exercice 3 (Séries de Taylor/Laurent) *Développer les fonctions suivantes en séries de Taylor et de Laurent.*

1. *Soient*

$$f(z) = \frac{1}{1-z} \quad \text{et} \quad g(z) = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

   a) *Déterminer les développements en série de Taylor et de Laurent des fonctions* $f(z)$ *et* $g(z)$ *autour du point* $z_0 = 0$, *et préciser leur domaine de validité.*

   b) *Déterminer les développements en série de Taylor et de Laurent de la fonction* $f(z)$ *autour du point* $z_0 = -1$ *et préciser leur domaine de validité.*

2. *Soit*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}.$$

   a) *Déterminer les développements en série de Taylor et de Laurent de cette fonction autour du point* $z_0 = 0$. *Préciser le domaine de validité de ces développements.*

   b) *En déduire la valeur des intégrales*

      i.
$$\int_C f(z)\,dz,$$
      où C *est le cercle défini par* $|z| = 3/2$ *parcouru une fois dans le sens trigonométrique positif.*

      ii.
$$\int_C f(z)\,dz,$$
      où C *est le cercle défini par* $|z| = 3$ *parcouru une fois dans le sens trigonométrique positif.*

3. *Développer les fonctions suivantes en série de Laurent autour de la singularité insolée $z_0 = 0$, préciser le domaine de ces développements ; déterminer le type de singularité en $z_0 = 0$ et la valeur du résidu en $z_0 = 0$:*
   i. $\dfrac{\cos\ z}{z}$;
   ii. $z\cos\left(\dfrac{1}{z^2}\right)$;
   iii. $\dfrac{1}{z^3(1-z^2)}$;
   iv. $\dfrac{e^z-1}{z}$;
   v. $\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$.
4. *Déterminer le développement en série de Laurent de la fonction*
$$f(z) = \frac{1}{z^2(z+i)},$$
autour du point $z_0 = 0$. Préciser le domaine de validité de ce développement.
5. *Déterminer le développement en série de Taylor et de Laurent de la fonction*
$$f(z) = \frac{1}{z^2+iz+2}$$
autour du point $z_0 = -i$. Préciser le domaine de validité de ce développement.

Exercice 4 (Calcul d'intégrales II) *Calculer les intégrales suivantes. Avec toujours un dessin pour commencer, comprenant le contour et les singularités.*

1. *Soient C_1 et C_2 les cercles définis respectivement par $|z| = 2$ et $|z-i| = 2$ parcourus une fois dans le sens trigonométrique positif. Soit $a \in \mathbb{R}$, calculer les intégrales suivantes.*
   i. $\displaystyle\int_{C_1} \frac{z}{z^2+1}\,dz$;
   ii. $\displaystyle\int_{C_2} \frac{e^{az}}{z}\,dz$;
   iii. $\displaystyle\int_{C_1} \frac{2z^2+z-2}{z^2(z-1)}\,dz$;
   iv. $\displaystyle\int_{C_2} \frac{e^{-z}}{z-i\frac{\pi}{2}}\,dz$;
   v. $\displaystyle\int_{C_1} \frac{z}{z^2+2z+2}\,dz$;

vi. $\displaystyle\int_{C_2} \frac{e^{-z}}{z-4i}\,dz$;

2. *Calculer l'intégrale*

$$\int_C \frac{e^{\pi/2z}}{(z+i)(z^2+1)}\,dz$$

où C *est le cercle, parcouru une fois dans le sens trigonométrique positif, défini par*

a) $|z-2i|=2$;

b) $|z+2i|=2$;

c) $|z|=2$.

3. *Calculer les intégrales*

i. $\displaystyle\int_{C_1} \frac{z^2}{2z^2+iz+1}\,dz$;

ii. $\displaystyle\int_{C_2} \frac{e^{2z}}{(z+i)^4}\,dz$;

iii. $\displaystyle\int_{C_3} \frac{e^{\sqrt{2}z}}{z^2+i}\,dz$;

iv. $\displaystyle\int_{C_2} \frac{dz}{z^3+1}$;

v. $\displaystyle\int_{C_1} \frac{z}{z^3-i}\,dz$;

vi. $\displaystyle\int_{C_3} \frac{z^4}{z^4+1}\,dz$

où C_1, C_2 *et* C_3 *sont les chemins fermés simples parcourus dans le sens trigonométrique positif, où* C_1 *est le rectangle de sommets* $2, -2, 2+3i$ *et* $-2+3i$ *;* C_2 *est le cercle* $|z|=2$ *et* C_3 *est le carré de sommets* $0, i, -1+i$ *et* -1.

Exercice 5 (Calcul d'intégrales généralisées) *Calculer les intégrales généralisées suivantes en utilisant la formule des résidus. Faire à chaque fois un dessin du contour choisi et des singularités.*

i. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$;

ii. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$;

iii. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,dx$;

iv. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(2x-i)(2x^2+ix+1)}\,dx$;

v. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{(2x-i)(2x^2+ix+1)}\,dx$;

vi. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^3+i}$;

vii. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$;

viii. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$;

ix. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2+1}$;