ULB **Exercices 7** **S9, 2013/2014**
MATHF214, Compléments de Mathématiques
Assistants : S. Dendievel, R. Nascimento Titulaire : Th. Gallouët

---

Exercice 1 *Construire par développement en série de Taylor autour de $x_0 = 0$, la solution générale de l'équation différentielle :*

a) $y'' + y = 0$;

b) $(1 - x^2)y'' - 4xy' - 2y = 0$;

c) $(1 + x^2)y'' - 4xy' + 6y = 0$;

d) $\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) y'' + 4xy' - 10y = 0$

.

Exercice 2 *On considère l'équation différentielle*

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' - \lambda y = 0.$$

a) Montrer que les coefficients c_k des solutions $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ satisfont à la relation de récurrence

$$c_{k+2} = \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+2)(k+1)} c_k$$

avec $k \in \mathbb{N}$.

b) *i) Montrer que pour $c_1 = 0$ et $\lambda = n(n+1)$, $n \in 2\mathbb{N}$, la solution se réduit à un polynôme de degré n.*

ii) Sous ces conditions, écrire les polynômes $P_n(x)$, de degré $0, 2$ et 4, tels que $P_n(1) = 1$ (avec $n = 0, 2, 4$).

c) *i) Montrer que pour $c_0 = 0$ et $\lambda = n(n+1)$, $n \in 2\mathbb{N} + 1$, la solution se réduit à un polynôme de degré n.*

ii) Sous ces conditions, écrire les polynômes $P_n(x)$, de degré $1, 3$ et 5, tels que $P_n(1) = 1$ (avec $n = 1, 3, 5$).

Exercice 3 *On considère l'équation différentielle*

$$xy'' + (1 - x)y' - \lambda y = 0.$$

1. *Montrer que les coefficients c_k des solutions $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty}$ satisfont à la relation de récurrence*

$$c_{k+2} = \frac{k + \lambda}{(k+1)^2} c_k$$

avec $k \in \mathbb{N}$.

2. *i) Montrer que pour $\lambda = -n, n \in \mathbb{N}$, la solution se réduit à un polynôme de degré n.*

ii) Sous ces conditions, écrire les polynômes $L_n(x)$, de degré $0, 1, 2, 3$ et 4, tels que $L_n(0) = n!$ (avec $n = 0, 1, 2, 3, 4$).

Exercice 4 *On considère l'équation différentielle*

$$(1 - x^2)y'' - xy' + a^2 y = 0$$

où $a \in \mathbb{N}$ et $y : [-1, 1] \to \mathbb{R}$.

1. Déterminer la relation de récurrence satisfaite par les c_k des solutions $y(x)$ développables en série de Taylor autour de $x_0 = 0$.
2. On fait le choix $c_0 = 0$ lorsque a est impair et $c_1 = 0$ lorsque a est pair. En déduire que la solution y qui correspond à ce choix est un polynôme dont on indiquera le degré et la parité.
3. Déterminer le polynôme dans le cas $a = 3$.
4. Montrer que $y(x) = \cos(\gamma \arccos x)$, pour $\gamma \geq 0$ est solution de l'équation différentielle avec une valeur de γ que l'on déterminera.

Exercice 5 *On considère l'équation différentielle*

$$y'' + 2xy' + 2y = 0.$$

1. *Obtenir la relation de récurrence qui régit les coefficients c_k des solutions $y(x)$ développables en série de Taylor autour de $x_0 = 0$.*
2. *i) Construire les solutions développables en série de Taylor autour de $x_0 = 0$.*

   ii) Parmi ces solutions, déterminer celle qui satisfait aux conditions initiales

$$\begin{cases} y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0. \end{cases}$$