CORRIGÉ

YANN BRENIER, THOMAS GALLOUËT

Soit (ω, v) une solution, dans $BC^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^2)$, des équations d'Euler dans le plan (qu'on a vues dans le premier cours):

$$v = v(t,x) = (\partial_2\psi, \partial_1\psi)(t, x_1, x_2)$$
$$\partial_t\omega + \nabla\cdot(\omega v) = 0, \quad -\Delta\psi = \omega.$$

On note la valeur initiale de ω par ω_0 et

$$\kappa = \max\{||\omega_0||_{L^1(\mathbb{R}^2)}, ||\omega_0||_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\}.$$

On veut obtenir des estimations sur (ω, v) qui ne dépendent que de cette constante κ.

1) En introduisant le flot ξ_s^t (notations du cours et remarquer que $\nabla\cdot v = 0$), on a, comme dans le cours, immédiatement

$$\omega(t,x) = \omega_0(\xi_t^0(x))$$

et donc

$$|\omega(t,x)| \le \kappa.$$

2) En utilisant la fonction de Green de $-\Delta$ sur $\mathbb{R}^2$, on voit qu'il existe une constante numérique α telle qu'en coordonnées polaires,

$$v(t,x) = \alpha\int_0^\infty dr\int_0^{2\pi}(-\sin\theta, \cos\theta)\;\omega(t, x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)d\theta.$$

On déduit

$$|v(t,x)| \le c\int_0^1 dr\int_0^{2\pi}\;|\omega(t, x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)|d\theta.$$
$$+c\int_1^\infty dr\int_0^{2\pi}\; r|\omega(t, x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)|d\theta.$$
$$\le c\sup_x\;|\omega(t,x)| + c\int_{\mathbb{R}^2}\;|\omega(t,x)|dx \le c\kappa.$$

(On note par c n'importe quelle constante numérique.)

3) Pour $\epsilon \in]0,1]$, on introduit

$$v_\epsilon(t,x) = \gamma\int_0^\infty dr\inf(1, r/\epsilon)\int_0^{2\pi}(-\sin\theta, \cos\theta)\;\omega(t, x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)d\theta.$$

On voit tout de suite que

$$|v_\epsilon(t,x) - v(t,x)| \le c\epsilon\sup_x\;|\omega(t,x)| \le c\epsilon\kappa.$$

Par ailleurs, on vérifie que

$$
\begin{aligned}
|D_x v_\epsilon(t,x)| &\le c\int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} \inf(1/r,1/\epsilon)|\omega(t,x_1+r\cos\theta,x_2+r\sin\theta)|d\theta \\
&\le c\int_0^\epsilon dr\int_0^{2\pi} \epsilon^{-1}|\omega(t,x_1+r\cos\theta,x_2+r\sin\theta)|d\theta \\
&+c\int_\epsilon^1 dr\int_0^{2\pi} r^{-1}|\omega(t,x_1+r\cos\theta,x_2+r\sin\theta)|d\theta \\
&+c\int_1^\infty dr\int_0^{2\pi} r|\omega(t,x_1+r\cos\theta,x_2+r\sin\theta)|d\theta \\
&\le c(1+\log(1/\epsilon))\kappa = c\log(e/\epsilon)\kappa.
\end{aligned}
$$

On a donc, pour tous x, y dans $\mathbb{R}^2$

$$|v(t,x)-v(t,y)| \le c(|x-y|\log(e/\epsilon)+e^{-2}\epsilon)\kappa.$$

En optimisant en ϵ ou, plus simplement, en posant $\epsilon = e^2 d(x,y)$, où

$$d(x,y) = \min(e^{-2}, |x-y|),$$

on obtient

$$|v(t,x)-v(t,y)| \le c(|x-y|\log(e^{-1}/d(x,y)) + d(x,y))\kappa \le c|x-y|\log(1/d(x,y))\kappa.$$

4) On a, en fixant x et y avec $x \neq y$ (ce qui garantit $\xi_s^t(x) \neq \xi_0^t(y)$ pour tout t, car ξ_s^t est toujours une bijection de $\mathbb{R}^2$)

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\log(|\xi_s^t(x)-\xi_s^t(y)|) &= \frac{(v(t,\xi_s^t(x)-v(t,\xi_s^t(y)))\cdot(\xi_s^t(x)-\xi_s^t(y))}{|\xi_s^t(x)-\xi_s^t(y)|^2} \\
&\le c\log\left(1/d(\xi_s^t(x),\xi_s^t(y))\right)\kappa = -c\log\left(d(\xi_s^t(x),\xi_s^t(y))\right)\kappa.
\end{aligned}
$$

Donc

$$\frac{d}{dt}\log(d(\xi_s^t(x),\xi_s^t(y))) \le -c\log\left(d(\xi_s^t(x),\xi_s^t(y))\right)\kappa,$$

d'où

$$\log(d(\xi_s^t(x),\xi_s^t(y))) \le \log(d(x,y))\exp(-c\kappa|t-s|),$$

et finalement

$$d(\xi_s^t(x),\xi_s^t(y)) \le d(x,y)^{\exp(-c\kappa|t-s|)}.$$

FIMFA, DMA, Ecole Normale Supérieure, FR-75005 Paris, France
Email address: `yann.brenier@ens.fr, thomas.gallouet@inria.fr`