ENS **TD 8 : Hamilton-Jacobi suite**
EDP

Exercice 1 [unicité pour l'équation eikonale]

1. Montrer que si $v_1 \in \mathcal{C}^1([-1,1])$ (resp. $v_2 \in \mathcal{C}^1([-1,1])$) est une sous-solution de viscosité (resp. une sur-solution de viscosité) de $v + |v'| = 0$ sur $]-1,1[$ et si v_1 et v_2 sont telles que $v_1 \leq v_2$ sur $\{-1,1\}$, alors $v_1 \leq v_2$ sur $[-1,1]$.
2. Montrer que si v_1 (resp. v_2) est une sous-solution de viscosité scs (resp. une sur-solution de viscosité sci) de $v + |v'| = 0$ sur $]-1,1[$ telles que $v_1 \leq v_2$ sur $\{-1,1\}$, alors $v_1 \leq v_2$ sur $[-1,1]$.
3. Montrer que u est une sous-solution de viscosité scs (resp. sur-solution de viscosité sci) de $|u'| - 1 = 0$ sur $]-1,1[$ si et seulement si $v = -e^{-u}$ est une sous-solution de viscosité scs (resp. sur-solution de viscosité sci) de $v + |v'| = 0$ sur $]-1,1[$.
4. Montrer que $U(x) = 1 - |x|$ est l'unique solution de viscosité continue de

$$\begin{cases} |u'| - 1 = 0 \quad \text{sur} \quad]-1,1[\\ u(1) = u(-1) = 0. \end{cases}$$

   c'est-à-dire que U est une fonction continue sur $[-1,1]$ qui vaut 0 en ± 1 et une solution de viscosité continue de $|u'| - 1 = 0$ sur $]-1,1[$.
5. Résoudre de même

$$\begin{cases} -|u'| + 1 = 0 \quad \text{sur} \quad]-1,1[\\ u(1) = u(-1) = 0. \end{cases}$$

Exercice 2 On considère le probeème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2}\right) & = & 0 \\ u(0,x) & = & g(x), \end{cases} \tag{1}$$

avec comme condition initiale

$$g_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} & x < 0 \\ x & \text{si} & x > 0. \end{cases}$$

où

$$g_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} & x < 0 \\ x & \text{si} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si} & x > 1. \end{cases}$$

1. Donner la formulation faible de (1) avec g_1 puis g_2 comme condition initiale.

2. Calculer explicitement l'unique solution entropique pour chacun des systèmes (2 solutions a calculer).
3. Montrer que ce sont bien des solutions faibles, entropique (oui oui il faut faire le calcul).

Exercice 3 Calculer explicitement l'unique solution entropique de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2} \right) & = & 0 \\ u(0,x) & = & g(x), \end{array} \right.$$

avec

$$g(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{si} & x < -1 \\ 0 & \text{si} & -1 < x < 0 \\ 2 & \text{si} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si} & x > 1. \end{array} \right.$$