ENS **TD 7 : vers Hamilton-Jacobi**
EDP

Exercice 1 [Formulation variationnelle, Problème de Poisson et Principe de Dirichlet.]
Soit U un ouvert borné. On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{dans } U \\ u &= g \quad \text{sur } \partial U \end{cases} \tag{1}$$

1. Montrer l'unicité de la solution. (Ici et dans les questions suivantes ∂U est C^1.)

   On veut montrer que la solution du problème de Poisson (1) peut être obtenue en minimisant une certaine fonctionnelle. Considérons donc la fonctionnelle d'energie

   $$I[w] := \int_U \left(\frac{1}{2}|Dw|^2 - wf \right) dx,$$

   w appartenant à l'espace

   $$A := \{w \in C^2(\bar{U}) | w = g \text{ sur } \partial U\}.$$

2. Montrer que si $u \in C^2(\bar{U})$ est une solution de (1) alors

   $$I[u] = \min_{w \in A} I[w]. \tag{2}$$

3. Inversement, montrer que si $u \in A$ satisfait (2), alors u est solution du problème de Poisson (1).

.

Exercice 2 [fonctions semi-continues]
Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

1. Soit $x_0 \in \Omega$. Montrer que u est sci en x_0 si et seulement si $\underline{\lim}_{x \to x_0} u(x) \geq u(x_0)$.
2. Montrer que u est sci sur Ω si et seulement si son épigraphe est fermé. On rappelle que l'épigraphe de u est défini par

   $$\operatorname{epi} u = \{(x, r) \in \Omega \times \mathbb{R},\, u(x) \leq r\}.$$

3. Montrer que u est sci sur Ω si et seulement si u est la limite croissante d'une suite de fonctions continues sur Ω.

pour le sens direct, dans le cas où $u > 0$, on pourra poser $u_n(x) = \inf_{y \in \Omega}\{u(y) + n|x - y|\}$ où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3 [enveloppes scs et semi-limites relaxées]

1. Soit $(u^\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille de fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$ localement bornées par dessus sur Ω. Montrer que
$$\left(\sup_{\alpha\in A} u^\alpha\right)^* = \left(\sup_{\alpha\in A} (u^\alpha)^*\right)^* .$$
2. Soit $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ une famille de fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$ qui est uniformément localement bornée par dessus sur Ω. Montrer que
$$\overline{\lim_{\epsilon}}^* u^\epsilon = \overline{\lim_{\epsilon}}^* (u^\epsilon)^*.$$

Exercice 4 [sur et sous-différentiels]

Soient $u : \Omega \to \mathbb{R}$ sci (resp. scs) et $x_0 \in \Omega$. Le sous-différentiel $D^{2,-}u(x_0)$ (resp. sur-différentiel $D^{2,+}u(x_0)$) d'ordre 2 en x_0 de u est l'ensemble des couples $(p, X) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tels qu'il existe $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ touchant u par dessous (resp. dessus) en x_0 telle que $(p, X) = (\nabla\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0))$.

1. Si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, déterminer $D^{2,+}u(x_0)$ et $D^{2,-}u(x_0)$ pour $x_0 \in \Omega$.
2. En admettant le lemme qui suit, montrer que $(p, X) \in D^{2,-}u(x_0)$ si et seulement si pour x dans un voisinage de x_0,
$$u(x) - u(x_0) \geq p \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}X(x - x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|^2).$$
   Lemma 1 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et $\epsilon : U \to \mathbb{R}$ localement bornée et qui tend vers 0 en 0. Alors, il existe $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de 0 et telle que $|\epsilon| \leq \eta$ au voisinage de 0 et pour tout $\nu \in \mathbb{N}^n$, $|x|^{|\nu|}|\partial^\nu\eta(x)| \to 0$ lorsque $x \to 0$.*
3. Soit $u(x) = |\cos x|$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $D^{2,-}u(x_0)$ pour $x_0 \in \mathbb{R}$.
4. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   (i) $(p, X) \in D^{2,-}u(x_0)$.
   (ii) Il existe une fonction φ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $u - \varphi$ atteint un minimum local en x_0 et $(p, X) = (\nabla\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0))$.
   (iii) Il existe une fonction φ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $u - \varphi$ atteint un minimum local strict en x_0 et $(p, X) = (\nabla\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0))$.
5. On considère l'équation
$$F(x, u, \nabla u, D^2u) = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega \tag{3}$$
   où $F : (x, z, p, A) \in \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto F(x, z, p, A) \in \mathbb{R}$ est continue, croissante en z et elliptique dégénérée.
   On rappelle la définition de sur-solution de viscosité : $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est sur-solution de viscosité de (3) sur Ω si u est localement bornée inférieurement et si pour tout $x_0 \in \Omega$ et pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ touchant u_* par dessous en $x_0 \in \Omega$, alors $F(x_0, u(x_0), \nabla\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq 0$.
   Déduire de l'exercice une nouvelle définition des sur-solutions de viscosité en termes de sous-différentiels.

Exercice 5 [plusieurs définitions des solutions de viscosité]

Le cadre est le même que dans la question 5. de l'exercice précédent.

1. Montrer que dans la définition de sur-solution de viscosité, on peut remplacer la condition "φ touche u_* par dessous en x_0" par "$u_* - \varphi$ admet un minimum local en x_0".
2. Montrer qu'en changeant $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ par $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, on ne change pas la notion de sur-solution de viscosité.
3. Montrer que lorsque l'équation est d'ordre 1, on ne change pas la notion de sur-solution de viscosité en remplaçant $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ par $\varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega)$.

Exercice 6 [Équation de Hamilton-Jacobi] On se propose, dans cette partie, d'étudier le problème de Cauchy suivant pour l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u(t,x) + H(x, d_x u) & = & 0, \, \forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) & = & g(x), \, \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{array} \right. \tag{4}$$

On a $H(x,p) \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $u \colon \mathbb{R}^n \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est l'inconnue, $u = u(t,x)$.

Déterminer l'équation différentielle hamiltonnienne (d'ordre 1) que doivent vérifier les caractéristiques $t \mapsto (x(t), p(t))$ associées à 4. Donner également l'équation vérifiée par $\varphi(t) = u(t, x(t))$. On définit $L(x(t), \dot{x}(t)) = \dot{x}(t)p(t) - H(x,p)$.

Exercice 7 [Méthode de Viscosité évanescente.] On considère l'equation de Burgers avec un terme supplémentaire de viscosité.

$$\partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2} \right) = \varepsilon \, \partial_x^2 u. \tag{5}$$

On cherche les solutions qui sont des ondes

$$u(t,x) = u_\varepsilon(x - \sigma t). \tag{6}$$

On impose aussi les limites de $u(t,.)$ en $-\infty$ et $+\infty$ par u_g et u_d (où $u_g > u_d$ sont des réels). Enfin, on impose aussi les limites de $\partial_x u(t,.)$ par 0.

1. Calculer u_ε pour que l'onde associé (6) soit solution de (5), et retrouver au passage la relation de Rankine-Hugoniot.
2. Montrer que $\varepsilon |\partial_x u_\varepsilon|^2 \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} M \, \delta$ où M est un réel et δ est la distribution de Dirac.