Pour toute la feuille d'exercice on fixe $\Omega \in \mathbb{R}^d$ un domaine borné à bord régulier.

Exercice 1 [Interpolation et injection de Sobolev.] Soit $r \in [p,q]$, montrer qu'il existe θ tel que

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|^{\theta}_{L^p(\Omega)} \|f\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)}.$$

En déduire que pour tout $q < 2^*$ (ou 2^* est l'exposant critique pour l'inégalité de sobolev) l'injection de $H^1_0(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est compacte.

Exercice 2 [convergence faible et convergence des normes implique convergence forte.] Montrer que dans $L^2(\Omega)$ on a l'équivalence entre

1. $u_n \underset{L^2}{\rightharpoonup} u$ et $\|u_n\|_{L^2} \underset{L^2}{\to} \|u\|_{L^2}$.
2. $u_n \underset{L^2}{\to} u$.

Même question dans un espace de hilbert, de banach, un espace $L^p(\Omega)$ avec $p > 1$.

Exercice 3 [Semi continuité inférieur.] Montrer que si $p > 1$ alors la fonction de $L^p(\Omega) \to \mathbb{R} : u \mapsto \int_\Omega |u|^p$ est sequentiellement semi continue inférieure.

Exercice 4 [Cas critique.]

1. Montrer qu'il existe $u \in L^q(\Omega)$, $\nabla u \in L^2(\Omega)$, deux mesures de Borel μ, ν et une suite de fonction $u_n \in C^\infty_c(\Omega)$ tel que $|u_n|^q \overset{*}{\rightharpoonup} |u|^q + \nu$, $|\nabla u_n|^2 \overset{*}{\rightharpoonup} |\nabla u|^2 + \mu$ et
$$\int_\Omega |u|^q + \nu(\Omega) = \alpha, \int_\Omega |\nabla u|^2 + \mu(\Omega) = I_\Omega(\alpha) \tag{1}$$
Remarque : On appelle ν et μ les mesures de défaut de compacité.
2. En utilisant l'inégalité de Sobolev et le théorème de Kondrasov montrer que $\forall \varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$,
$$\limsup \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi|^q |u_n - u|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C_d \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$
3. En déduire que pour tout borélien $A \in \mathbb{R}^d$
$$\nu(A)^{\frac{1}{q}} \leq C_d \mu(A)^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$
4. Soit $N = \left\{x \in \mathbb{R}^d \middle| \mu(\{x\}) > 0\right\} \in \bar{\Omega}$, l'ensemble des atomes de μ. Montrer que N est dénombrable (l'ensemble sera noté $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$) et que $\mu \geq \sum_j \mu_j \delta_{x_j}$.

5. Déduire des questions précédente que $\nu << \mu$ et $\nu = \sum_j \nu_j \delta_{x_j}$ avec

$$\nu_j = \nu\{x_j\} \leq \mu_j^{\frac{q}{2}} C_d^q.$$

6. Montrer alors l'inégalité

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |u|^q + \sum_j \nu_j \right)^{\frac{2}{q}} \geq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u|^q \right)^{\frac{2}{q}} + \sum_j \left(\nu_j^{\frac{2}{q}} \right). \tag{4}$$

   En déduire l'alternative suivante
   i) Soit $\int_\Omega |u|^q = \alpha$ et $\nu = 0$.
   ii) Soit $u = 0$ p.p. et $\nu = \alpha \delta_{y_0}$.

7. Conclure, en utilisant la forme des minimiseurs dans $\mathbb{R}^d$ que seul (ii) est possible. On a ainsi montré un phénomène de concentration pour les suites minimisantes.

Exercice 5 [formule de la moyenne.] On se place sur $\mathbb{R}^d$, rappeler la formule du noyau de green pour l'opérateur $-\Delta$. Montrer la formule de la moyenne :

$$u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u(y)dy = \int_{B(x,r)} u(y)dy$$

On peut alors finir le TD4.