Pour toute la feuille d'exercice on fixe $\Omega \in \mathbb{R}^d$ un domaine borné à bord régulier et $q = 2^*$ tel que
$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{d}.$$
On s'intéresse à la meilleur constante de Sobolev c'est à dire au problème de minimisation suivant :
$$I_\Omega(\alpha) = I_{2,q,\Omega}(\alpha) = \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 \middle| u \in C_c^\infty(\Omega),\ \int_\Omega |u|^q = \alpha \right\}. \tag{1}$$

Exercice 1 [Homogéneité] Montrer que
$$I_{2,q',\mathbb{R}^d}(\alpha) := \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } q' \neq q \\ C_d^{-2} \alpha^{\frac{2}{q}} & \text{si } q' = q \end{array} \right. .$$

et
$$I_{2,q',\Omega}(\alpha) := \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } q' > q \\ I_{2,q,\mathbb{R}^d}(\alpha) & \text{si } q' = q \end{array} \right. .$$

Exercice 2 [Cas sous critique] On fixe $1 < q' < q$, montrer que l'infimum de $I_{2,q',\Omega}(\alpha)$ est atteint.

Exercice 3 [Cas critique]

1. Montrer qu'il existe $u \in L^q(\Omega)$, $\nabla u \in L^2(\Omega)$, deux mesures de Borel μ, ν et une suite de fonction $u_n \in C_c^\infty(\Omega)$ tel que $\|u_n\|^q \overset{*}{\rightharpoonup} |u|^q + \nu$, $|\nabla u_n|^2 \overset{*}{\rightharpoonup} |\nabla u|^2 + \mu$ et
$$\int_\Omega |u|^q + \nu(\Omega) = \alpha,\ \int_\Omega |\nabla u|^2 + \mu(\Omega) = I_\Omega(\alpha) \tag{2}$$
Remarque : On appelle ν et μ les mesures de défaut de compacité.
2. En utilisant l'inégalité de Sobolev et le théorème de Kondrasov montrer que $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$,
$$\limsup \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi|^q |u_n - u|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C_d \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$
3. En déduire que pour tout borélien $A \in \mathbb{R}^d$
$$\nu(A)^{\frac{1}{q}} \leq C_d \mu(A)^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

4. Soit $N = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \middle| \mu(\{x\}) > 0 \right\} \in \bar{\Omega}$, l'ensemble des atomes de μ. Montrer que N est dénombrable (l'ensemble sera noté $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$) et que $\mu \geq \sum_j \mu_j \delta_{x_j}$.
5. Déduire des questions précédente que $\nu << \mu$ et $\nu = \sum_j \nu_j \delta_{x_j}$ avec

$$\nu_j = \nu\{x_j\} \leq \mu_j^{\frac{q}{2}} C_d^q.$$

6. Montrer alors l'inégalité

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |u|^q + \sum_j \nu_j \right)^{\frac{2}{q}} \geq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u|^q \right)^{\frac{2}{q}} + \sum_j \left(\nu_j^{\frac{2}{q}} \right). \tag{5}$$

   En déduire l'alternative suivante
   i) Soit $\int_\Omega |u|^q = \alpha$ et $\nu = 0$.
   ii) Soit $u = 0$ p.p. et $\nu = \alpha \delta_{y_0}$.
7. Conclure, en utilisant la forme des minimiseurs dans $\mathbb{R}^d$ que seul (ii) est possible. On a ainsi montré un phénomène de concentration pour les suites minimisantes.