ENS **TD 3 : méthode des caractéristiques**
EDP

Exercice 1

1. Soit $v \in \mathbb{R}^n$ et $f_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. Montrer que le problème de Cauchy d'inconnue $f = f(t,x)$
$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0, \qquad f(0,x) = f_0(x),$$
admet une unique solution $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$, donnée par la formule
$$f(t,x) = f_0(x - tv), \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+,\ x \in \mathbb{R}^n.$$
2. (Lemme de Gronwall) Soient $A > 0$, $B > 0$ et $\phi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue telle que, pour tout $t \geq 0$,
$$\phi(t) \leq A + B \int_0^t \phi(s)\, ds.$$
Montrer que, pour tout $t \geq 0$, on a l'inégalité $\phi(t) \leq Ae^{Bt}$.
3. Soit $T > 0$ et $V\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs admettant des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport aux variables x_j pour $j = 1, \ldots, d$ et vérifiant les hypothèses suivantes
$$V \text{ et } \nabla_x V \text{ sont continues sur } [0,T] \times \mathbb{R}^n, \tag{\textbf{H1}}$$
et il existe une constante $\kappa > 0$ telle que, pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$,
$$|V(t,x)| \leq \kappa(1 + |x|). \tag{\textbf{H2}}$$
On considère maintenant le problème à coefficients variables
$$\partial_t f(t,x) + V(t,x) \cdot \nabla_x f(t,x) = 0, \quad f(0,x) = f_0(x),$$
pour lequel on souhaite étendre la méthode présentée à la question 1. pour le cas de coefficients constants.
On dit que γ est une courbe intégrale du champ V passant par x à l'instant t si $\gamma\colon s \mapsto \gamma(s) \in \mathbb{R}^n$ vérifie
$$\frac{d}{ds}\gamma(s) = V(s, \gamma(s)), \qquad \gamma(t) = x.$$
Le théorème de Cauchy-Lipschitz entraîne l'existence locale d'une telle courbe intégrale.
Montrer que pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ la courbe intégrale $s \mapsto \gamma(s)$ de V passant par x à l'instant t est définie pour tout $s \in [0,T]$. Dans la suite on notera $s \mapsto X(s,t,x)$ cette courbe intégrale, qui est donc par définition solution de
$$\partial_s X(s,t,x) = V(s, X(s,t,x)), \qquad X(t,t,x) = x.$$
L'application $X : [0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ainsi définie est appelée le *flot caractéristique* de l'équation $\partial_t + V \cdot \nabla_x$.

4. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle

$$\dot{y}(s) = y(s)^2, \quad y(t) = x$$

et en déduire que l'on ne peut pas définir le flot de $\partial_t + x^2\partial_x$ de façon globale (on remarque que dans ce cas, l'hypothèse (**H2**) n'est pas vérifiée).

5. Montrer que pour tous $t_1, t_2, t_3 \in [0, T]$, on a

$$X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) = X(t_3, t_1, x).$$

6. Montrer que $\partial_s \partial_{x_j} X(s, t, x)$ et $\partial_{x_j} \partial_s X(s, t, x)$ existent pour tous $(s, t, x) \in]0, T[\times]0, T[\times \mathbb{R}^n$, et se prolongent en des fonctions continues sur $[0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^n$ et que

$$\partial_s \partial_{x_j} X(s, t, x) = \partial_{x_j} \partial_s X(s, t, x),$$

pour tout $(s, t, x) \in [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^n$.

7. Montrer que pour tout $(s, t) \in [0, T] \times [0, T]$ l'application

$$X(s, t, \cdot) \colon x \mapsto X(s, t, x)$$

est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

8. Montrer que $X \in \mathcal{C}^1([0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.

9. Montrer que

$$\partial_t X(0, t, x) + \sum_{j=0}^{d} V_j(t, x) \partial_{x_j} X(0, t, x) = 0,$$

pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$.

10. Soit $f_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. Montrer que la fonction f définie par

$$f(t, x) = f_0(X(0, t, x))$$

est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ et vérifie

$$\partial_t f(t, x) + V(t, x) \cdot \nabla_x f(t, x) = 0, \quad f(0, x) = f_0(x).$$

Exercice 2 : équation de transport avec terme source et terme d'amortissement

On considère $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ ainsi que a et $S \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$. Montrer que l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + v \cdot \nabla_x u(t, x) + a(t, x) u(t, x) = S(t, x) & \text{sur} \quad \mathbb{R}^+_* \times \mathbb{R} \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases}$$

admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ et donner une expression de cette solution.

Exercice 3 : équation de Burgers

On considère l'équation de Burgers en dimension 1 :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \frac{1}{2}\partial_x(u^2)(t,x) = 0 & \text{sur} \quad \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \\ u(0,\cdot) = u_0. \end{cases} \tag{1}$$

qui peut s'écrire aussi sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + u(t,x)\partial_x u(t,x) = 0 & \text{sur} \quad \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \\ u(0,\cdot) = u_0. \end{cases}$$

Sous cette seconde forme, on voit apparaitre une équation de transport (non linéaire) et plus précisément, u est solution d'une équation de transport dont la vitesse de propagation au point x et à l'instant t est égale à $u(t,x)$.

1. Soit $T > 0$. On suppose que u est une solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,T[\times\mathbb{R}$ de l'équation (1). Appliquer la méthode des caractéristiques et prouver que pour tout $0 \le s < T$ et tout $z \in \mathbb{R}$, on a :
$$u(s, z + su(0,z)) = u(0,z).$$
2. On suppose que $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, que u_0 est bornée ainsi que sa dérivée u_0'. Dans l'exercice 2 du TD 1, on a vu qu'en posant
$$T = \frac{1}{\sup_{z\in\mathbb{R}}(\max(0, -u_0'(z))},$$
l'équation (1) admet une solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,T[\times\mathbb{R}$. Montrer l'unicité de cette solution.

Exercice 4

1. On note $S = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. On considère le problème suivant en dimension 2 :
$$\begin{cases} (\partial_{x_1}u)^2 + (\partial_{x_2}u)^2 = 1 & \text{sur} \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ u = 0 & \text{sur} \quad S. \end{cases}$$
Appliquer la méthode des caractéristiques à cette équation et en déduire deux solutions possibles.
2. Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Trouver une solution du problème suivant
$$\begin{cases} \partial_{x_1}u + x_1\partial_{x_2}u = u & \text{sur} \quad \mathbb{R}^2 \\ u(1,\cdot) = h & \text{sur} \quad \mathbb{R}. \end{cases}$$
au moyen de la méthode des caractéristiques.

Exercice 5 Résoudre à l'aide de la méthode des caractéristiques les problèmes aux limites, définies sur un ouvert $U \in \mathbb{R}^2$ et un bord $\Gamma \in \mathbb{R}^2$ suivants :

1.

$$\begin{cases} x\partial_y u - y\partial_x u = u, & \forall x, y > 0 \\ u(x,0) = g(x), & \forall\, x > 0. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x\partial_y u - y\partial_x u = 0, & \forall x, y > 0 \\ u(x,0) = g(x), & \forall\, x > 0. \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} x\partial_x u + y\partial_y u = 2u, \\ u(x,1) = g(x). \end{cases}$$