TD-EDP-18 SEPT 2018

1. Sur l'équation des ondes

Retrouver la formule de d'Alembert (1747) pour résoudre l'équation des ondes

$$\partial^2_{tt} u = \gamma^2 \Delta u$$

en une dimension d'espace ($u = u(t,x)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^d$ quand $d = 1$) en l'écrivant comme un système de deux équations du "premier ordre".

2. Des espaces vectoriels de dimension infinie de solutions des équations d'Euler!

1) Soit $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions C^∞ telles que

$$-\Delta\psi = f \circ \psi.$$

Montrer que $(\psi, \omega = f \circ \psi)$ forme toujours une solution "stationnaire" (i.e. indépendante du temps) des équations d'Euler des fluides en dimension deux d'espace et calculer le champ de pression p associé.
2) Déduire l'existence d'une famille à un paramètre d'espaces vectoriels de dimension infinie de solutions stationnaires des équations d'Euler, tous générés par des polynômes trigonométriques de la forme

$$\psi(x,y) = \sin((x-a)\alpha)\sin((y-b)\beta).$$

Est-ce contradictoire avec le caractère non-linéaire des équations?

3. Equations de transport et équations différentielles ordinaires

1) Soit un champ de vecteur $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ de classe BC^∞. Montrer que l'EDO

$$\partial_t \xi^t_s(x) = v(t, \xi^t_s(x)), \quad \xi^s_s(x) = x, \quad (t,s) \in \mathbb{R}^2, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

génère une famille ξ^t_s à deux paramètres de difféomorphismes de $\mathbb{R}^d$ et montrer que, dans le cas où $\mathrm{div} v = 0$, ces difféomorphismes "conservent le volume" au sens

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(\xi^t_s(x))dx = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)dx, \quad \forall \phi \in C^0_c(\mathbb{R}^d)$$

pour tous t, s dans $\mathbb{R}$.
2) Estimer la constante de Lipschitz de ξ^t_s seulement en fonction de $t \to L(t)$ où $L(t)$ est la constante de Lipschitz de $v(t,\cdot)$.
3) Soit un champ de vecteur $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ de classe BC^∞. Donner la solution générale de l'équation "de transport"

$$\partial_t \omega + v^j \partial_j \omega = \beta,$$

aussi notée

$$\partial_t\omega + (v\cdot \mathrm{grad})\omega = \beta,$$

en fonction de la "donnée initiale" $\omega(t=0,x)$ et du "second membre" $\beta(t,x)$, supposés eux même de classe BC^∞.

4) On considère une famille $v^{(n)}$ de champs du type précédent tels que

$$L = \sup_n \sup_{t\in\mathbb{R}} L^{(n)}(t) < \infty, \quad M = \sup_n \sup_{(t,x)} |v^{(n)}(t,x)| < \infty.$$

Etudier la compacité de la famille des $(\xi^{(n)})_s^t$ à l'aide du théorème d'Ascoli.

5) Etendre, par densité et compacité, la formule obtenue en 3), au cas où les "données" $\omega(0,\cdot)$, b appartiennent seulement à l'espace L^∞ et où $v = v(t,x)$ est un champ L^∞, Lipschitz en x uniformément en t.

4. L'Équation de la chaleur et la formule de Hopf

1) Vérifier que, pour toute fonction continue bornée f

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x + y\sqrt{\epsilon t}\,) \exp(-|y|^2/2) dy$$

est solution de l'équation de la chaleur

$$\partial_t u = \frac{\epsilon}{2}\Delta u$$

dans $\mathbb{R}^d$ et identifier $u(0,\cdot)$ en fonction de f.

2) Supposant $f > 0$ et écrivant $u(t,x) = \exp(-\phi(t,x)/\epsilon)$ montrer que ϕ est solution de

$$\partial_t\phi + F(\mathrm{grad}\phi) = \frac{\epsilon}{2}\Delta\phi,$$

où $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est à trouver.

3) Quelle formule de résolution (due à E. Hopf) peut-on concevoir pour l'équation limite, dite équation d'Hamilton-Jacobi, où ϵ est négligé?

N.B. On pourra s'inspirer du "lemme de Laplace" : si μ est une mesure de probabilité de Borel sur $\mathbb{R}^d$ alors pour toute fonction de Borel bornée ψ

$$\sup \mathrm{ess}_\mu \psi = \lim_{\epsilon\downarrow 0} \epsilon \log\Big(\int_{\mathbb{R}^d} \exp(\psi(x)/\epsilon) d\mu(x)\Big).$$

FIMFA-ENS