

Math-F-214
Compléments de mathématiques

titulaire : Thomas Gallouët

version du 2 janvier 2014

Table des matières

1	Fonctions d'une variable complexe	7
1.1	Le plan complexe	8
1.2	Fonctions d'une variable complexe	10
1.3	\mathbb{C} -dérivabilité et les équations de Cauchy-Riemann	12
1.4	Intégrale le long d'un chemin	13
1.5	Conséquences de (PF)	14
1.5.1	Détecter une singularité	14
1.5.2	Invariance de l'intégrale le long d'un contour	15
1.5.3	Formule des résidus	15
1.6	Formule de Cauchy	17
1.7	Série de Taylor et série de Laurent	18
1.8	Calcul d'intégrales par la méthode des résidus	20
2	Séries de Fourier	21
2.1	Produit scalaire et norme	21
2.2	Forme complexe	22
2.3	Forme réelle	23
2.4	Dérivation et convolution	25
3	Opérateurs linéaires	27
3.1	Calcul formel sur les opérateurs	27
3.2	Fonctions propres et valeurs propres	29
3.3	Opérateurs de Sturm-Liouville	30
3.4	Fonctions spéciales de la mécanique quantique	31
3.5	Oscillateur harmonique quantique	31
4	Transformées de Fourier et de Laplace	33
4.1	Transformée de Fourier	33

4.1.1	Propriétés de la transformée de Fourier	35
4.1.2	Utilisation des résidus	39
4.2	Transformée de Laplace	40
4.2.1	Propriétés de la transformée de Laplace	41
4.2.2	Utilisation des propriétés pour calculer des transformées ou des originaux	43
5	Applications	45
5.1	Résolution de l'équation de la chaleur – application des séries de Fourier	45
5.2	Formule de D'Alembert pour l'équation des ondes – application de la transformée de Fourier	46
5.3	Circuit RC	47
5.4	Equation de Schrödinger	48

Avant-propos

Ce texte n'est pas un syllabus. Il peut être considéré comme le “squelette” d'un syllabus. Il contient tous les sujets traités au cours, les définitions, quelques exemples mais surement trop peu, les formules et les tous les résultats présentés au cours oral. Il ne contient par contre aucun raisonnement ou des raisonnements trop succincts.

L'objectif poursuivi en écrivant ce document est de vous donner un support pour bien structurer vos notes prises au cours oral, et de vous donner un texte qui reprend la matière (non détaillée) du cours. Il sera mis à jour tout au long du quadrimestre. Il est basé sur le syllabus de l'année 2011/2012 de Denis Bonheure.

Chapitre 1

Fonctions d'une variable complexe

Notre point de départ pour définir l'ensemble des complexes est l'hypothèse de l'existence d'un nouvel élément, que nous notons i , tel que $i^2 = -1$. Bien entendu, $i \notin \mathbb{R}$. À partir de cette hypothèse, nous définissons \mathbb{C} par $\mathbb{R} + i\mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\mathbb{C} := \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Tout complexe z s'écrit donc $x + iy$ et cette représentation est unique, on peut parler de l'écriture plate. En effet, si z peut s'écrire de deux façons différentes $z = x + iy$ et $z = u + iv$ avec $x \neq u$ et $y \neq v$, alors on observe que $i = \frac{x-u}{v-y} \in \mathbb{R}$ ce qui est impossible. Puisque la représentation $z = x + iy$ est unique, on peut définir la **partie réelle** de z par $\operatorname{Re}(z) := x$ et la **partie imaginaire** de z par $\operatorname{Im}(z) := y$.

Les opérations $+$ et \cdot s'étendent simplement en utilisant la règle $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned}(x + iy) + (u + iv) &= x + u + i(y + v) \\ (x + iy) \cdot (u + iv) &= xu + ixv + iyu + i^2yv = xu - yv + i(xv + yu).\end{aligned}$$

En particulier, on observe que $(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}^+$. Cette observation nous fait introduire deux quantités : le **conjugué** complexe de $z = x + iy$ est le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$. Le **module** de $z = x + iy$ est le nombre réel positif $|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Elle permet aussi de calculer l'inverse du nombre z si $\operatorname{Re} z \neq 0$ et $\operatorname{Im} z \neq 0$,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad (1.0.1)$$

1.1 Le plan complexe

Comme chaque nombre complexe z possède une représentation unique $x + iy$, on peut représenter graphiquement \mathbb{C} dans le plan (voir FIG. 1.1) en repérant la partie réelle de z sur l'axe horizontal et la partie imaginaire de z sur l'axe vertical.

Les propriétés suivantes se déduisent de calculs élémentaires et s'interprètent géométriquement : pour tout $z, w \in \mathbb{C}$, on a

- (i) $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$;
- (ii) $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z = \bar{z}$;
- (iii) $\bar{\bar{z}} = z$;
- (iv) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ et $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$.

On s'apperçoit aussi que le module de z est la longueur euclidienne du vecteur (x, y) et possède des propriétés semblables à la valeur absolue. De plus, si $\operatorname{Im} z = 0$, on a $|z|_{\mathbb{C}} = |z|_{\mathbb{R}}$, ce qui justifie d'utiliser la même notation pour le module et la valeur absolue.

Rappelons que si $z, w \in \mathbb{C}$, alors

- (i) $|zw| = |z||w|$;
- (ii) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$ et $|z| = |\bar{z}|$;
- (iii) $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$;
- (iv) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (inégalité triangulaire) ;
- (v) $|z - w| \geq ||z| - |w||$;
- (vi) si $z \neq 0$, $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Nous terminons cette section en définissant les coordonnées polaires dans le plan, qui mènent à la **représentation sous forme trigonométrique** des nombres complexes dans le **plan de Gauss**. Si $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, nous notons $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et θ l'angle, compté positivement, entre l'axe horizontal $y = 0$ et le vecteur (x, y) . Le couple (r, θ) donne les **coordonnées polaires** du point (x, y) . Il est courant de noter les coordonnées polaires d'un nombre complexe par $(|z|, \arg z)$ où $\arg z$ est appelé l'**argument** de z (voir FIG. 1.1).

On calcule aisément que $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$. Tout nombre complexe z peut alors s'écrire

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}.$$

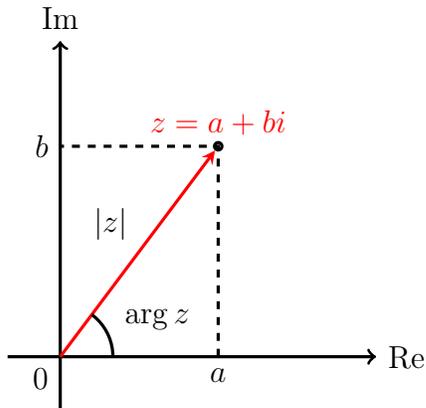


FIGURE 1.1 – Illustration de nombres complexes dans le plan de Gauss

On observe qu'avec cette écriture, le produit de deux nombres complexes z_1, z_2 se réduit à multiplier les modules et additionner les angles :

$$\begin{aligned}
 z_1 z_2 &= r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\
 &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i (\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)) \\
 &= r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) \\
 &= r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.
 \end{aligned}$$

En particulier, on obtient la formule suivante pour les puissances :

$$z^n = |z|^n e^{in\theta} = |z|^n (\cos n\theta + i \sin n\theta),$$

valable également pour la racine $n^{\text{ième}}$. Comme θ est déterminé à 2π près, on déduit de cette formule qu'un nombre complexe possède n racines $n^{\text{ièmes}}$:

$$z_k = |z|^{1/n} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right),$$

où $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

Exemples 1.1.1. Avec $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ on trouve $|z| = 2$ et $\theta = \arg(z)$ vérifie $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta = -\frac{\pi}{4}$. Au final $z = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Dans \mathbb{C} les racines de $z^2 = 1$ sont 1 et -1 .

1.2 Fonctions d'une variable complexe

Nous allons considérer des applications dont la variable est un nombre complexe et dont l'image est un sous-ensemble du plan complexe. Nous adoptons les notations suivantes. Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto f(z)$, nous écrivons $z = x + iy$ où x est la partie réelle de z , y est la partie imaginaire de z et puisque $f(z)$ est un nombre complexe, nous écrivons

$$f(z) = \operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z).$$

Comme tout nombre complexe a une partie réelle et une partie imaginaire, nous pouvons en réalité voir f comme une fonction de deux variables et nous noterons, avec un léger abus de notation,

$$f(z) = f(x, y) = f_1(x, y) + i f_2(x, y),$$

où $f_1(x, y)$ est la partie réelle de $f(z)$ et $f_2(x, y)$ est la partie imaginaire de $f(z)$. Ici, f_1 et f_2 sont des fonctions de deux variables réelles et à valeur réelle, c'est-à-dire $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

- Exemples 1.2.1.**
- La fonction $z \mapsto e^z$ est régulière en tout point. Dans ce cas $f_1(x, y) = e^x \cos(y)$ et $f_2(x, y) = e^x \sin(y)$.
 - La fonction $z \mapsto \ln(z)$, en tant qu'inverse de l'exponentielle n'est pas bien définie. Il faut choisir une détermination de l'angle dans un intervalle de longueur 2π , par exemple $[0, 2\pi[$ puis on peut définir l'application $z = re^{i\theta} \mapsto \ln(r) + i\theta$ qui inverse bien l'exponentielle. Attention une détermination de l'angle différente donnera une fonction "ln" différente.
 - Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $z \mapsto z^\alpha$ n'est pas bien définie.

Nous transposons aux fonctions d'une variable complexe la notion de continuité des fonctions de variables réelles.

Définition 1.2.2. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On dit que $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue en $z_0 = x_0 + iy_0$ si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

On peut également voir la continuité à travers les fonctions f_1 et f_2 .

Proposition 1.2.3. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On dit que $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue en $z_0 = x_0 + iy_0$ ssi f_1 et f_2 sont continues en (x_0, y_0) .

esquisse de démonstration. si f_1 et f_2 sont continues en (x_0, y_0) , alors

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f_1(x, y) = f_1(x_0, y_0)$$

et

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f_2(x, y) = f_2(x_0, y_0),$$

ce qui équivaut à

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f_1(x, y) + if_2(x, y)) = f_1(x_0, y_0) + if_2(x_0, y_0),$$

soit

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

□

Vocabulaire. Soient $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$.

- Si f possède une limite en z_0 , on dit que z_0 est un **point régulier** de f .
- Si f n'a pas de limite en z_0 , on dit que z_0 est une **singularité** de f .
Dans ce cas Si $1/f$ possède une limite en z_0 , on dit que z_0 est un **pôle** de f . De plus si z_0 est un pôle et que k est le plus petit entier tel que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) < \infty,$$

on dit que z_0 est un **pôle d'ordre** k .

Exemples 1.2.4. - La fonction $z \mapsto 1/z$ a une singularité en $z_0 = 0$.

- La fonction $z \mapsto 1/z^k$, $k \in \mathbb{N}$, a un pôle d'ordre k en $z_0 = 0$.
- La fonction $z \mapsto e^z$ est régulière en tout point.
- Même en prenant une détermination dans $[0, 2\pi[$, la fonction $z \mapsto \ln(z)$, en tant qu'inverse de l'exponentielle, n'est pas continue. En effet si \ln est la fonction $z = re^{i\theta} \mapsto \ln(r) + i\theta$ on a $0 = \lim_{0 < \epsilon \rightarrow 0} \epsilon = \lim_{0 < \epsilon \rightarrow 0} \ln(e^{i\epsilon}) = \lim_{0 < \epsilon \rightarrow 0} \ln(e^{i(2\pi - \epsilon)}) = \lim_{0 < \epsilon \rightarrow 0} (2\pi - \epsilon) = 2\pi$. Ce qui est une contradiction. On n'a plus de contradiction si on ne considère que des complexes dont l'argument est inclus dans $]0, 2\pi[$. Il faut donc pour définir un \ln complexe continue exclure toute une demi droite, dans notre cas l'axe $\operatorname{Re}(z) > 0$, du domaine de définition.

1.3 \mathbb{C} -dérivabilité et les équations de Cauchy-Riemann

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Importons à présent le concept de dérivée des fonctions d'une variable.

Définition 1.3.1. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On dit que $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est \mathbb{C} -dérivable en z_0 si la limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Si f est \mathbb{C} -dérivable en tout point d'un ensemble $D \subset \mathbb{C}$, on dit que f est **holomorphe** dans D .

Lorsque f est \mathbb{C} -dérivable en z_0 , on note

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Puisque cette limite existe, elle ne dépend pas de la façon dont on la calcule. En prenant la limite successivement pour $x \rightarrow x_0$ en fixant $y = y_0$ puis pour $y \rightarrow y_0$ en fixant $x = x_0$, on obtient

$$f'(z_0) = \partial_x f_1(x_0, y_0) + i \partial_x f_2(x_0, y_0) \tag{1.3.1}$$

$$= -i \partial_y f_1(x_0, y_0) + \partial_y f_2(x_0, y_0), \tag{1.3.2}$$

ce qui mène aux équations de Cauchy-Riemann (CR)

$$\partial_x f_1(x_0, y_0) = \partial_y f_2(x_0, y_0) \tag{1.3.3}$$

$$\partial_x f_2(x_0, y_0) = -\partial_y f_1(x_0, y_0). \tag{1.3.4}$$

Les formules (1.3.1) et (1.3.2) permettent de calculer la dérivée en un point. On montre par exemple que $(e^z)' = e^z$ ou encore que si $z_0 \in \mathbb{C}$, $1/(z - z_0)$ a pour dérivée $-1/(z - z_0)^2$ au point z . Les équations de Cauchy-Riemann permettent aussi de montrer que des fonctions ne sont pas \mathbb{C} -dérivables par exemple l'application $z \mapsto \bar{z}$ ne vérifie pas les conditions de Cauchy-Riemann et n'est donc pas \mathbb{C} -dérivable.

Remarque 1.3.2. En définissant les opérateurs de dérivée partielle le long de z et \bar{z} :

$$\partial_z = \partial_x - i\partial_y, \quad (1.3.5)$$

$$\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y, \quad (1.3.6)$$

on trouve pour une fonction f \mathbb{C} -dérivable :

$$\partial_z f = f'(z) \quad (1.3.7)$$

$$\partial_{\bar{z}} f = 0. \quad (1.3.8)$$

La deuxième égalité code exactement les conditions de Cauchy-Riemann.

1.4 Intégrale le long d'un chemin

Définition 1.4.1. Un **chemin** dans \mathbb{C} est l'image d'une application $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$. Un **chemin fermé** dans \mathbb{C} est l'image d'une application $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Nous parlerons aussi de **courbe** pour un chemin, de **contour** ou **lacet** lorsque la courbe est fermée.

Remarque 1.4.2. Un lacet possède toujours une composante bornée dite **intérieur**. On parlera de **l'intérieur** d'un lacet. Par exemple l'intérieur d'un cercle de centre 0 et de rayon r est le disque de centre 0 et de rayon r .

Si γ est un chemin dans \mathbb{C} et $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, on définit l'**intégrale curviligne**

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_0^1 f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Exemple 1.4.3. Calcul de $\int_{\gamma} f(z) dz$, pour la fonction $z \mapsto \bar{z}$ sur le segment $[1 - i, 1 + i]$. On paramètre le segment $[1 - i, 1 + i]$ par $t \mapsto \gamma(t) = 1 - i + 2ti$. On trouve alors $\gamma'(t) = 2i$, $\bar{z} = \gamma(t) = 1 + i - 2ti$. On en déduit donc

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^1 (1 + i - 2ti) 2i dt = 2i.$$

Théorème 1.4.4 (PF). *Soit D un morceau de \mathbb{C} sans trous, γ un lacet dans D et f est holomorphe dans D , alors*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Le même résultat est encore vrai si f est seulement holomorphe dans $D \setminus \{z_1, \dots, z_p\}$, $p \in \mathbb{N}$ et l'intérieur du lacet γ ne contient pas $\{z_1, \dots, z_p\}$.

C'est une propriété fondamentale des fonctions holomorphes. Nous nous y référerons par la mention "(PF)".

esquisse de démonstration. On admet qu'il existe une application $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :

$$\partial_x U = f_1 + if_2 \tag{1.4.1}$$

$$\partial_y U = -f_2 + if_1. \tag{1.4.2}$$

Cette application est obtenue grâce aux hypothèses sur D et aux conditions de Cauchy-Riemman. On trouve alors que

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_0^1 (f_1 + if_2)(x'(t) + iy'(t))dt \tag{1.4.3}$$

$$= \int_0^1 (\partial_x U) x'(t)dt + \int_0^1 (\partial_y U) y'(t)dt \tag{1.4.4}$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt} (U(x(t), y(t))) dt = 0. \tag{1.4.5}$$

□

Remarque 1.4.5. *Il faut faire très attention à l'orientation des contours. Ici on prend toujours le sens trigonométrique quand on voit le contour depuis son intérieur.*

1.5 Conséquences de (PF)

1.5.1 Détecter une singularité

La propriété fondamentale des fonctions holomorphes permet de détecter les fonctions qui ne sont pas holomorphes. En effet, s'il existe un contour γ

tel que

$$\int_{\gamma} f(z)dz \neq 0,$$

alors f ne peut pas être holomorphe dans la région du plan complexe délimitée par le contour γ . Par exemple, la fonction $f(z) = 1/(z - z_0)$ a une singularité en z_0 . Il s'agit d'un pôle d'ordre 1. Si γ est un cercle centré en z_0 , on vérifie que

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i.$$

1.5.2 Invariance de l'intégrale le long d'un contour

Une deuxième conséquence de (PF) est la suivante : si deux contours γ_1 et γ_2 contiennent toutes les singularités z_1, z_2, \dots, z_n d'une fonction holomorphe sur $D \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, D étant supposé sans trous, et ont la même orientation alors

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz. \quad (1.5.1)$$

1.5.3 Formule des résidus

La propriété (PF) conduit également à une façon de calculer l'intégrale le long d'un contour γ d'une fonction f qui possède des singularités à l'intérieur de γ .

Définition 1.5.1. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur $D \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$. Le *résidu* de f en z_j est le nombre

$$\text{Res}(f)(z_j) = R(f)(z_j) := \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} f(z)dz,$$

où $C_j \subset D$ est un cercle entourant z_j et aucune autre singularité de f .

Exemple 1.5.2.

$$\text{Res}\left(\frac{1}{z - z_0}\right)(z_0) = 1$$

Remarque 1.5.3. La valeur du résidu ne dépend pas du rayon du cercle pris autour de la singularité, en particulier on peut faire tendre ce rayon vers 0. Cette astuce sera utile dans de très nombreux calculs.

Théorème 1.5.4 (formule des résidus). *Soit D un morceau sans trous du plan complexe, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur $D \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ et γ un chemin fermé dans D , alors*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{z_j \in \text{int } \gamma} R(f)(z_j).$$

C'est la **formule des résidus** qui affirme que l'intégrale sur le contour γ est égale à $2\pi i$ fois la somme des résidus en toutes les singularités contenues à l'intérieur du contour γ .

esquisse de démonstration. On prend un petit cercle $\gamma_j = C_{z_j}(r_j)$, autour de chaque singularité z_j , orienté positivement : $\gamma_j(t) = z_j + r_j e^{2i\pi t}$ avec $t \in [0, 1]$. On considère le lacet Γ :

$$\Gamma = \gamma - \sum_{j=1}^n \gamma_j$$

Les hypothèses de la propriété fondamentale (PF) sont vérifiées pour le chemin Γ car par construction on a évité toutes les singularités. On en déduit que $\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$ et donc

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{j=0}^n \int_{C_{z_j}(r_j)} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=0}^n \text{Res}(f)(z_j).$$

□

Cette formule sert à calculer de nombreuses intégrales. Dans les cas pratiques il faut d'abord identifier les singularités à l'intérieur du lacet pour lequel on calcule l'intégrale d'une fonction f . On calcule ensuite leurs résidus.

Exemple 1.5.5. *La fonction $f(z) = 1/z(z-1)$ a deux pôles d'ordre 1. On calcule $\text{Res}(f)(0) = -1$ et $\text{Res}(f)(1) = 1$. En particulier, si γ est un contour qui contient 0 et 1, par exemple le cercle de centre 0 et de rayon 2 : $C_0(2)$, on a $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$.*

Faisons en détail le calcul de $\text{Res}(f)(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j(r)} f(z)dz$. Tout d'abord on paramètre $C_j(r)$ par $t \in [0, 1] \mapsto \gamma_0(t) = re^{2i\pi t}$. On a donc $\gamma'(t) = 2i\pi re^{2i\pi t}$.

Ce qui donne

$$\operatorname{Res}(f)(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j(r)} f(z) dz \quad (1.5.2)$$

$$= \int_0^1 \frac{r e^{2i\pi t}}{r e^{2i\pi t} (r e^{2i\pi t} - 1)} dt \quad (1.5.3)$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{r e^{2i\pi t} - 1} dt. \quad (1.5.4)$$

L'intégrande $\frac{1}{r e^{2i\pi t} - 1}$ tend vers -1 quand r tend vers 0 . Le résidu étant indépendant de r on en déduit que $\operatorname{Res}(f)(0) = \int_0^1 (-1) dt = -1$

1.6 Formule de Cauchy

Une autre application de la propriété fondamentale est la formule de Cauchy.

Théorème 1.6.1. Soit D un morceau sans trou du plan complexe et $z \in D$. Soit f une fonction holomorphe dans D , alors

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z} dw,$$

où $C \subset D$ est un cercle centré en z . C'est la **formule de Cauchy**.

Si $n \geq 1$, nous notons $f^{n+1}(z) = (f^n)'(z)$ et $f^1(z) = f'(z)$. La **formule de Cauchy généralisée** affirme que

$$f^n(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw,$$

où $C \subset D$ est un cercle centré en z .

esquisse de démonstration. Soit z fixé. on considère la fonction $w \in C \mapsto \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$. En paramétrant C par $t \mapsto \gamma(t) = z + r e^{2i\pi t}$, on montre que

$$\int_C \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = \int_0^1 (f(z + r e^{2i\pi t}) - f(z)) 2i\pi dt.$$

En passant alors à la limite quand r tend vers 0, on déduit de la continuité de f en z que $\int_C \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw = 0$. Il vient

$$\int_C \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_C \frac{f(z)}{w-z} dw = f(z) \operatorname{Res}\left(\frac{1}{w-z}\right)(z) = 2i\pi f(z).$$

Pour la formule de Cauchy généralisée, on remarque que le membre de droite de la formule de Cauchy est infiniment \mathbb{C} -dérivable par rapport à z donc f l'est également. En dérivant la formule de Cauchy par rapport à z on obtient la formule de Cauchy généralisée. \square

1.7 Série de Taylor et série de Laurent

Soit D un morceau sans trou du plan complexe et $z_0 \in D$. Si f est holomorphe dans D , alors pour tout $z \in D$, on a

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) (z - z_0)^k.$$

C'est la **série de Taylor** de f autour du point z_0 . On écrit

$$f(z) = ST_{z_0}[f](z).$$

Si f a une singularité en z_0 et est holomorphe dans $D \setminus \{z_0\}$, alors pour tout $z \in D \setminus \{z_0\}$, on a

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (z - z_0)^k,$$

où

$$a_k := \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz,$$

C étant un cercle contenu dans D et entourant la singularité z_0 . Cette série s'appelle la **série de Laurent** de f autour de z_0 et on la note $SL_{z_0}[f](z)$. Si f est holomorphe dans D tout entier, la série de Laurent est une série de Taylor. Il suffit d'utiliser la formule de Cauchy généralisée pour s'en rendre compte.

En pratique on utilisera peu souvent les formules pour les coefficients dans les expressions des séries de Taylor et de Laurent. Par contre, il est très utile de se souvenir de la valeur de la série géométrique. Si $|z| < 1$, alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}.$$

On peut par exemple obtenir la série de Laurent suivante dans un disque autour de 1 sans utiliser la formule des coefficients. En effet, si $|z-1| < 1$,

$$\frac{-1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1-(1-z)} = -\frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n = \sum_{k=-1}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k.$$

Formules pour le calcul des résidus

Soit f une fonction holomorphe sur $D \setminus z_0$, et $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (z - z_0)^k$ son développement en série de Laurent on a :

1.

$$\text{Res}(f)(z_0) = a_{-1}.$$

2. Si de plus z_0 est une singularité d'ordre k pour f on a :

$$\text{Res}(f)(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{(k-1)}}{dz} \left(\frac{(z - z_0)^k f(z)}{(k-1)!} \right).$$

Démonstration. On part de la définition du résidu pour f , on remplace f par sa série de Laurent. Après échange de la série et de l'intégrale il ne reste plus qu'à a_{-1} . On utilise ici que $\int_{C_{z_0}} (z - z_0)^n dz = 2i\pi$ pour $n = -1$ et zéro sinon. La deuxième formule découle directement de la première. \square

Exemple 1.7.1. Calcul de la valeur de l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}$. La méthode est systématique. On prolonge tout d'abord la fonction sur tout \mathbb{C} : $z \mapsto \frac{1}{(z^2+1)^2}$. On trouve les singularités de cette fonction : i et $-i$. Ensuite on cherche à appliquer la formule des résidus. Dans notre cas comme on ne peut pas prendre un chemin qui parcourt tout $[-\infty, +\infty]$ on va approcher cette intégrale. On choisit donc un $R > 0$, qui aura vocation à tendre vers $+\infty$ et on applique la formule des résidus sur l'ensemble $D = \{Im(z) > 0\} \cap D_0(R)$. Seule la singularité i est dans D , on trouve que son résidu vaut $1/4i$. Le contour de D est composé d'une part du segment $[-R, R]$, l'intégrale sur ce

segment tend vers I quand R tend vers $+\infty$ et d'autre part du demi cercle supérieur de rayon R , on voit ici que l'intégrale tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$. On en déduit que $I = \frac{\pi}{2}$.

1.8 Calcul d'intégrales par la méthode des résidus

Voir le chapitre sur la transformée de Fourier.

Chapitre 2

Séries de Fourier des fonctions périodiques

Dans ce chapitre, on considère l'ensemble des fonctions 2π -périodiques, i.e.

$$\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f(x + 2\pi) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Notre objectif est d'associer à chaque fonction des “coordonnées”, c'est-à-dire une suite de coefficients qui sont univoquement déterminés pour une fonction donnée.

Rappelons que dans \mathbb{R}^3 , tout point p est représenté par un triplet (x, y, z) de nombres réels. Chaque coordonnée représente la longueur des projections orthogonales du vecteur \vec{p} sur les axes construits sur la base orthonormée $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

Nous allons décomposer les fonctions périodiques dans une base orthonormée.

2.1 Produit scalaire et norme

Définition 2.1.1. Soit f et g deux fonctions 2π -périodiques, continues par morceaux, à valeur dans \mathbb{C} ($f, g \in C^0 PM(\mathbb{R}, \mathbb{C})$). On définit le produit scalaire de f par g par :

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \bar{g}(x) dx,$$

et la norme L^2 de f par :

$$\|f\| = \|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx}.$$

1. On dit que f est orthogonal à g si $\langle f, g \rangle = 0$.
2. Une famille de fonctions $(f_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est dite orthogonale si $\forall k \neq l, f_k$ et f_l sont orthogonal.
3. Si de plus $\forall k \in \mathbb{Z}, \|f_k\|_2 = 1$, on dit que la famille est orthonormale.

Remarque 2.1.2. La norme L^2 de f peut être infini.

On vérifie aisément que les fonctions de la famille

$$\{e^{ikt}, k \in \mathbb{Z}\}$$

sont orthogonales deux à deux. C'est donc une famille orthogonal. Par contre les éléments sont de normes 2π . On vérifie alors que la famille

$$\{e_k(t), k \in \mathbb{Z}\}$$

des fonctions

$$e_k(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt},$$

est *orthonormée*, c'est-à-dire que

$$\langle e_j, e_k \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k, \\ 1 & \text{si } j = k. \end{cases}$$

Rappelons la formule fondamentale $e^{ikt} = \cos(kt) + i \sin(kt)$.

2.2 Série de Fourier sous forme complexe

Définition 2.2.1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction 2π -périodique, continue par morceaux, on définit sa *série de Fourier* par

$$(Sf)(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{ikt},$$

où les coefficients sont donnés par

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$$

Les $(\alpha_k)_k$ sont les **coefficients de Fourier généralisés** de f .

Dans la base des fonctions orthonormées $e_k(t)$, les **coefficients de Fourier** s'écrivent

$$\hat{f}_k = \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

et la série de Fourier (sous forme complexe) de f est donnée par

$$(\mathbf{S}f)(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\hat{f}_k}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}.$$

En pratique, on travaille avec les coefficients généralisés. Bien entendu, on obtient la même série de Fourier, que l'on travaille dans la base normée ou pas.

2.3 Série de Fourier sous forme réelle

Lorsque f est à valeur réelle, on s'attend à ce que sa série de Fourier soit réelle. Ceci se vérifie plus facilement lorsqu'on considère le système orthonormé

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \mid n \in \mathbb{N}_0 \right\}. \quad (2.3.1)$$

où encore le système orthogonal

$$\{1, \cos nx, \sin nx \mid n \in \mathbb{N}_0\}. \quad (2.3.2)$$

Dans ce système orthogonal, la **série de Fourier sous forme réelle** d'une fonction f 2π -périodique s'écrit

$$(\mathbf{S}f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

où les *coefficients de Fourier ordinaires* (par opposition aux coefficients généralisés) sont donnés par les formules

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \quad k \geq 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt, \quad k \geq 1.$$

Il est clair que si f est à valeur réelle, les coefficients a_k et b_k sont réels et donc la série de Fourier de f est réelle (ce qui ne se voit pas du premier coup d'oeil dans le système composé des exponentielles complexes).

Remarquons également les propriétés suivantes. Si f *est paire* (c'est-à-dire $f(x) = f(-x)$ pour tout x), *alors tous les coefficients b_k sont nuls* et la série de Fourier de f est une “série cosinus” :

$$(Sf)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt.$$

Si f *est impaire* (c'est-à-dire $f(x) = -f(-x)$ pour tout x), *alors tous les coefficients a_k sont nuls* et la série de Fourier de f est une “série sinus” :

$$(Sf)(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt.$$

Ces propriétés découlent immédiatement du fait que l'intégrale sur $[-\pi, \pi]$ d'une fonction impaire est nulle.

Relations entre les coefficients généralisés et ordinaires

Nous avons décrit la série de Fourier d'une fonction 2π -périodique sous deux formes différentes (complexe et réelle). Les identités

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \text{ et } e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

permettent de déduire les relations entre les coefficients de Fourier généralisés et les coefficients ordinaires :

$$\begin{aligned}\hat{f}_0 &= \sqrt{2\pi}\alpha_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}a_0 \\ \hat{f}_k &= \sqrt{2\pi}\alpha_k = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(a_k - ib_k), \quad k \geq 1, \\ \hat{f}_{-k} &= \sqrt{2\pi}\alpha_{-k} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(a_k + ib_k), \quad k \geq 1,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}a_0 &= 2\alpha_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\hat{f}_0 \\ a_k &= \alpha_k + \alpha_{-k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\hat{f}_k + \hat{f}_{-k}), \quad k \geq 1, \\ b_k &= i(\alpha_k - \alpha_{-k}) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}(\hat{f}_k - \hat{f}_{-k}), \quad k \geq 1.\end{aligned}$$

Le calcul des coefficients généralisés est plus simple mais dans les applications, la série de Fourier sous forme réelle est privilégiée, surtout lorsqu'on travaille avec des fonctions à valeur réelle.

Un calcul formel mène à l'*identité de Parseval*

$$\|f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2.$$

Cette identité permet de calculer la valeur exacte de certaines séries numériques. Un exemple classique s'obtient en appliquant l'identité à la fonction $f(t) = t$ étendue par 2π -périodicité. Dans ce cas, les coefficients généralisés sont $\alpha_0 = 0$, $\alpha_n = (-1)^n/n$ si $n \neq 0$. L'identité de Parseval implique alors le résultat (étonnant)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2.4 Dérivation et convolution

Certaines opérations de l'analyse sur les fonctions se traduisent de façon très simple sur la suite des coefficients de Fourier.

Regardons tout d'abord l'opération dérivée. Si f est une fonction dérivable 2π -périodique, nous pouvons utiliser la formule d'intégration par parties pour calculer les coefficients de Fourier de f' et obtenir

$$\widehat{f'}_k = ik\widehat{f}_k.$$

La dérivation se traduit donc sur les coefficients par une multiplication (par ik).

Une autre opération sur les fonctions se traduit facilement sur les coefficients. Il s'agit du **produit de convolution**.

Définition 2.4.1. Soient f, g deux fonctions 2π -périodiques. La **convolée** de f par la fonction g est la fonction

$$f \star g : t \mapsto (f \star g)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(s)g(t-s) ds.$$

Le produit de convolution est commutatif. En changeant de variable dans l'intégrale (prendre $s = t - \tau$), nous obtenons

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(s)g(t-s) ds = \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau)f(t-\tau) d\tau.$$

Il s'ensuit que $f \star g = g \star f$.

Cette opération se traduit par une multiplication sur les coefficients de Fourier. Si γ_k désigne les coefficients généralisés de $f \star g$, α_k ceux de f et β_k ceux de g , on obtient

$$\gamma_k = 2\pi\alpha_k\beta_k.$$

Des opérations a priori compliquées, se traduisent en des opérations algébriques sur les coefficients de Fourier. Ces traductions sur les coefficients de Fourier permettent par exemple de résoudre des équations différentielles ou intégrales car les équations de départ se traduisent en des équations algébriques sur les coefficients de Fourier qui sont souvent plus simples.

Chapitre 3

Valeurs propres et fonctions propres d'opérateurs linéaires

Dans cette section, on considère des applications d'un espace vectoriel dans un autre espace vectoriel (souvent le même dans les applications). Le mot "opérateur" sera utilisé pour qualifier ces applications. L'ensemble des applications entre deux espaces vectoriels peut lui-même être vu comme un espace vectoriel en le munissant des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire.

La somme des opérateurs $A : V_1 \rightarrow V_2$ et $B : V_1 \rightarrow V_2$ est l'opérateur $A + B : V_1 \rightarrow V_2$ défini par

$$(A + B)v = Av + Bv,$$

pour tout $v \in V_1$.

Le produit λA d'un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ et d'un opérateur $A : V_1 \rightarrow V_2$ est l'opérateur défini par

$$(\lambda A)v = \lambda(Av),$$

pour tout $v \in V_1$.

3.1 Calcul formel sur les opérateurs

Définition 3.1.1. Soient V_1, V_2 deux espaces vectoriels. L'application $A : V_1 \rightarrow V_2$ est **linéaire** si pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ et tout $v, w \in V_1$,

$$A(\alpha v + \beta w) = \alpha Av + \beta Aw.$$

L'application est **anti-linéaire** si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ et tout $v, w \in V_1$,

$$A(\alpha v + \beta w) = \bar{\alpha}Av + \bar{\beta}Aw.$$

Exemples 3.1.2. 1. L'opérateur de dérivation $A : C^1([a, b]; \mathbb{R}) \rightarrow C([a, b]; \mathbb{R})$ défini par $u \rightarrow u'$ est linéaire.

2. L'opérateur de conjugaison complexe est anti-linéaire.

La composée $B \circ A$ de deux applications A, B porte le nom d'opérateur produit.

Définition 3.1.3. Soient V_1, V_2, V_3 des espaces vectoriels et $A : V_1 \rightarrow V_2$, $B : V_2 \rightarrow V_3$. L'opérateur produit $BA : V_1 \rightarrow V_3$ est défini par

$$(BA)v = B(Av).$$

La composée d'opérateurs est associative et distributive par rapport à la somme d'opérateurs.

Si $V_1 = V_2 = V_3$, on peut définir les opérateurs BA et AB . Ces opérateurs diffèrent en général. Ceci motive les définitions suivantes.

Définition 3.1.4. Soient V un espace vectoriel, $A : V \rightarrow V$ et $B : V \rightarrow V$. Le **commutateur** de A et B est l'opérateur

$$[A, B] := AB - BA.$$

L'**anti-commutateur** de A et B est l'opérateur

$$\{A, B\} := AB + BA.$$

Les opérateurs A, B commutent (respectivement anti-commutent) si $[A, B]$ (respectivement $\{A, B\}$) est l'opérateur nul.

Exemples 3.1.5. 1. Les opérateurs d/dx et d^2/dx^2 commutent.

2. Les opérateurs $x \cdot d/dx$ et d/dx ne commutent pas.

Définition 3.1.6. Soient un opérateur linéaire $A : V \rightarrow V$ et un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur V . L'opérateur A est dit **auto-adjoint** ou **hermitien** si

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle,$$

pour tout $v, w \in V$.

Exemples 3.1.7. 1. Considérons l'espace euclidien \mathbb{R}^3 et une application linéaire $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Cette application peut se représenter à l'aide d'une matrice 3×3 que nous notons \mathcal{A} . L'adjoint de A est l'application linéaire représentée par la matrice transposée de \mathcal{A} et A est auto-adjoint si et seulement si \mathcal{A} est une matrice symétrique.

2. Sur l'ensemble des fonctions 2π périodiques, l'opérateur d/dx n'est pas auto-adjoint.

3. Sur l'ensemble des fonctions 2π périodiques, l'opérateur $i \cdot d/dx$ est auto-adjoint.

3.2 Fonctions propres et valeurs propres

Définition 3.2.1. Soit un opérateur linéaire $A : V \rightarrow V$. Le scalaire $\alpha \in \mathbb{C}$ est une **valeur propre** de A s'il existe $v \in V \setminus \{0\}$ tel que

$$Av = \alpha v. \quad (3.2.1)$$

Les éléments v satisfaisant (3.2.1) sont appelés **fonctions propres** (correspondant à la valeur propre α) de l'opérateur A .

Si l'opérateur A est **hermitien**, alors les **valeurs propres sont réelles**. Une propriété remarquable des opérateurs hermitiens, est qu'ils permettent dans de nombreux cas de construire un système orthonormé de l'espace dans lequel ils sont définis. Le système est composé des fonctions propres de l'opérateur. Nous nous limitons ici à observer que **les fonctions propres associées à des valeurs propres distinctes sont nécessairement orthogonales**.

Démonstration. Ceci se déduit simplement du calcul suivant. Si v est un vecteur propre associé à α et w un vecteur propre associé à β , on a

$$\beta \langle v, w \rangle = \langle Av, w \rangle = \alpha \langle v, w \rangle,$$

ce qui implique $\langle v, w \rangle = 0$. On a utilisé le fait que $\bar{\beta} = \beta$ puisque A est hermitien. \square

Exemple 3.2.2. Les fonctions propres de l'opérateur $i \cdot d/dx$ sur l'espace des fonctions 2π -périodiques forment la base de Fourier.

3.3 Opérateurs de Sturm-Liouville

Considérons l'opérateur A défini par

$$A(f) = -\frac{1}{w(x)}(p(x)f'(x))' + \frac{q(x)}{w(x)}f(x),$$

où p, w sont des fonctions réelles strictement positives et q est une fonction réelle.

Pour que A soit un opérateur hermitien, on impose des conditions aux limites. Supposons que p, q, w sont des fonctions définies sur $[a, b]$. Définissons le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$ par

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b w(x)f(x)\overline{g(x)} dx.$$

Comme nous allons considérer uniquement des fonctions à valeurs réelles, nous pouvons écrire

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b w(x)f(x)g(x) dx.$$

Pour ce produit scalaire, A est un opérateur hermitien si par exemple

- $dom A = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f(a) = f(b) = 0\}$;
- $dom A = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f'(a) = f'(b) = 0\}$;
- $dom A = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f(a) = f'(b) = 0\}$;
- $dom A = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f(a)p(a) = f(b)p(b) = 0 \text{ et } f'(a) = f'(b)\}$.

On parle respectivement de conditions aux limites de **Dirichlet**, de **Neumann**, **mixtes** ou **périodiques**. Les exemples précédents ne donnent pas une liste exhaustive.

Une fonction non nulle $f \in dom A$ telle que

$$-(p(x)f'(x))' + q(x)f(x) = \mu w(x)f(x)$$

est une fonction propre de A associée à la valeur propre μ . Les fonctions propres sont orthogonales au sens du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$.

Exemple 3.3.1. Considérons l'opérateur défini par

$$A(g) = -g'' + 2xg' + g,$$

où $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Il peut être mis sous la forme de Sturm-Liouville

$$A : g \mapsto -\exp(x^2)(\exp(-x^2)g')' + g(x).$$

Cet opérateur est hermitien pour le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) f(x) \overline{g(x)} dx.$$

3.4 Fonctions spéciales de la mécanique quantique

Les exemples qui suivent sont nés de leur intérêt en mécanique quantique.

1. Prenons $w(x) = 1$, $p(x) = 1 - x^2$, $q(x) = \frac{m^2}{1-x^2}$ sur $[-1, 1]$. La recherche des fonctions propres de l'opérateur

$$f \mapsto -((1 - x^2)f')' + \frac{m^2}{1 - x^2}f$$

mène aux *polynômes de Legendre*.

2. Prenons $w(x) = \exp(-x)$, $p(x) = x \exp(-x)$, $q(x) = 0$ sur $[0, +\infty]$. La recherche des fonctions propres de l'opérateur

$$f \mapsto -\exp(x)(x \exp(-x)f')'$$

mène aux *polynômes de Laguerre*.

3. Prenons $w(x) = \exp(-x^2)$, $p(x) = \exp(-x^2)$, $q(x) = \exp(-x^2)$ sur \mathbb{R} . La recherche des fonctions propres de l'opérateur

$$f \mapsto -\exp(x^2)(\exp(-x^2)f')' + f$$

mène aux *polynômes de Hermite*.

3.5 Oscillateur harmonique quantique

L'Hamiltonien de l'oscillateur harmonique quantique fournit, pour la fonction d'onde, l'équation

$$-\frac{\hbar}{2m}\psi'' + \frac{1}{2}kx^2\psi = E\psi.$$

Pour trouver les valeurs de l'énergie E qui donnent des solutions physiquement admissibles, on étudie l'équation

$$-f'' + x^2 f = \lambda f,$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. En posant $f(x) = \exp(-\frac{1}{2}x^2)g(x)$, on se ramène à l'équation

$$-g'' + 2xg' + g = \lambda g.$$

Nous avons vu précédemment que cette équation est l'équation aux valeurs propres pour l'opérateur de l'exemple 3 de la section précédente. Les fonctions propres sont les polynômes de Hermite.

La recherche de solutions sous forme de série de Taylor

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

transforme l'équation différentielle en une récurrence sur les coefficients c_n :

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} = (1-\lambda+2k)c_k, \quad k \geq 0.$$

Seules les solutions polynomiales sont physiquement admissibles. On obtient alors deux familles de polynômes. La première en choisissant $c_0 = 0$ et $\lambda = 2k+1$ avec k entier et impair ; la deuxième en choisissant $c_1 = 0$ et $\lambda = 2k+1$ avec k entier et pair. Dans les deux cas, la série s'arrête au degré k . Les premiers polynômes de Hermite sont les fonctions

$$H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2, \dots$$

Il y a bien entendu un choix arbitraire à faire pour déterminer les coefficients et la convention habituelle est de choisir la normalisation qui donne la valeur 2^n au coefficient de degré maximal de H_n . Les solutions de l'oscillateur harmonique quantique sont les fonctions

$$f_n(x) = \exp(-\frac{1}{2}x^2)H_n(x).$$

Chapitre 4

Transformées de Fourier et de Laplace

4.1 Transformée de Fourier

Si g est une fonction 2π -périodique, sa série de Fourier s'écrit

$$(Sf)(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{ikt},$$

où les coefficients sont donnés par

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$$

Le changement de variable

$$t \mapsto t \frac{T}{2\pi}$$

montre que pour une fonction f qui est T -périodique, nous pouvons écrire la série

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{T,k} e^{ik \frac{2\pi}{T} t},$$

où

$$\alpha_{T,k} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik \frac{2\pi}{T} t} dt.$$

Il s'agit en fait de la décomposition de f dans la base $\{e^{ik \frac{2\pi}{T} t} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ des fonctions T -périodiques.

Lorsque T tend vers l'infini, la série de Fourier peut être vue comme une somme de Riemann qui tend vers l'expression

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\xi) e^{i2\pi\xi t} d\xi,$$

où

$$\hat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) e^{-i2\pi\xi s} ds.$$

Ceci motive les définitions suivantes.

Définition 4.1.1. La *transformée de Fourier* de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est la fonction $F[f] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$F[f](\xi) := \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i2\pi\xi s} ds.$$

La *transformée de Fourier inverse* de la fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est la fonction $F^{-1}[h] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$F^{-1}[h](s) := \check{h}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) e^{i2\pi\xi s} d\xi.$$

Pour les *bonnes fonctions*, on a la **formule d'inversion**

$$f(t) = F^{-1}[\hat{f}](t),$$

qui peut s'écrire

$$\check{\check{f}} = f$$

ou

$$F^{-1}[F[f]] = f,$$

ce qui justifie les notations.

Exemples 4.1.2. 1. La fonction Π définie par

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]-1/2, 1/2[, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

a pour transformée la fonction $\hat{\Pi}(\xi) = \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}$.

2. La fonction $\exp(-|t|)$ a pour transformée la fonction $2(4\pi^2\xi^2 + 1)^{-1}$.

4.1.1 Propriétés de la transformée de Fourier

Les propriétés suivantes sont utiles dans les applications pratiques mais également pour le calcul de certaines transformées.

1. Linéarité

La transformée de Fourier est linéaire. Pour rappel, cela signifie que

$$F[\alpha f + \beta g] = \alpha F[f] + \beta F[g],$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et f, g sont des fonctions transformables.

Démonstration.

$$\begin{aligned} F[\alpha f + \beta g] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha f(s) + \beta g(s)) e^{-i2\pi\xi s} ds \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i2\pi\xi s} ds + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) e^{-i2\pi\xi s} ds \\ &= \alpha F[f] + \beta F[g]. \end{aligned}$$

□

2. Formule du retard

Si $f_{t_0}(t) = f(t - t_0)$, alors

$$\hat{f}_{t_0}(\xi) = \exp(-2\pi i \xi t_0) \hat{f}(\xi).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \hat{f}_{t_0}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s - t_0) e^{-i2\pi\xi s} ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i2\pi\xi(s+t_0)} ds = e^{-i2\pi\xi t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i2\pi\xi s} ds \\ &= \exp(-2\pi i \xi t_0) \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

□

3. Formule de translation

Si $g_{\xi_0}(t) = f(t) \exp(2\pi i \xi_0 t)$, alors

$$\hat{f}(\xi - \xi_0) = \widehat{g_{\xi_0}}(\xi).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \widehat{g_{\xi_0}}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \exp(2\pi i \xi_0 s) e^{-i2\pi \xi s} ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \exp(-2\pi i (\xi - \xi_0) s) ds = \hat{f}(\xi - \xi_0). \end{aligned}$$

□

4. Formule de changement d'échelle

Si $f_a(t) = f(t/a)$, où $a \neq 0$, alors

$$\hat{f}_a(\xi) = |a| \hat{f}(a\xi).$$

Cette observation a pour conséquence que la transformée d'une fonction paire est une fonction paire. De même pour une fonction impaire.

Démonstration. On fait le changement de variable $t = s/a$, ce qui donne si a est strictement négatif :

$$\begin{aligned} \hat{f}_a(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s/a) e^{-i2\pi \xi s} ds \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi \xi (ta)} a dt = -a \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi a \xi t} dt \\ &= |a| \hat{f}(a\xi). \end{aligned}$$

On fait de même pour a strictement positif.

□

5. Formule de la dérivée

Si $\lim_{|s| \rightarrow \infty} f(s) = 0$, alors

$$\widehat{f}'(\xi) = 2\pi i \xi \widehat{f}(\xi).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \widehat{f}'(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(s) e^{-i2\pi\xi s} ds \\ &= [f(s) e^{-i2\pi\xi s}]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) (-i2\pi\xi) e^{-i2\pi\xi s} ds \\ &= i2\pi\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i2\pi\xi s} ds \\ &= 2\pi i \xi \widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

□

6. Dérivée d'une transformée

Si $h(s) = sf(s)$, alors

$$\frac{d\widehat{f}}{d\xi}(\xi) = -2\pi i \widehat{h}(\xi).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \frac{d\widehat{f}}{d\xi}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\xi} f(s) e^{-i2\pi\xi s} ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) (-i2\pi s) e^{-i2\pi\xi s} ds \\ &= -2i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} sf(s) e^{-i2\pi\xi s} ds \\ &= -2\pi i \widehat{h}(\xi). \end{aligned}$$

□

Les formules 5 et 6 entraînent que la transformée de la Gaussienne f_α définie par $f_\alpha(t) = \exp(-\alpha^2 t^2)$ est solution de l'équation différentielle

$$\alpha^2 y'(\xi) = -2\pi^2 \xi y(\xi)$$

et satisfait la condition initiale

$$\widehat{f}_\alpha(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha^2 t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}.$$

Dès lors,

$$\widehat{f}_\alpha(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \exp\left(-\frac{\pi^2 \xi^2}{\alpha^2}\right).$$

En particulier, pour le paramètre $\alpha = \sqrt{\pi}$, on voit que f_α et sa transformée coïncident.

7. Formule de Dirichlet

Si δ désigne la mesure de Dirac définie (dans un sens à préciser que nous n'expliquons pas dans ce cours) par la formule

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx,$$

pour toute fonction f qui décroît à l'infini, alors

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \exp\left(-\frac{\pi^2 \xi^2}{\alpha^2}\right) = \delta(\xi),$$

et on a formellement

$$\widehat{1}(\xi) = \widehat{\lim_{\alpha \rightarrow 0} f_\alpha}(\xi) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \exp\left(-\frac{\pi^2 \xi^2}{\alpha^2}\right),$$

i.e. $\widehat{1} = \delta$. On observe en effet que

$$f(0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 x^2}{\alpha^2}\right) f(x) dx.$$

La même heuristique suggère que

$$f(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{x} f(x) dx$$

et donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(kx)}{x} = \delta(x).$$

8. Formule de Plancherel

La transformée de Fourier conserve le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt,$$

c'est-à-dire

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle.$$

En particulier, on obtient la formule de Plancherel

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(t)|^2 dt.$$

Cette formule montre par exemple que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{(1 + 4\pi^2 t^2)^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2|t|) dt = 1$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\Pi(t)|^2 dt = 1.$$

4.1.2 Utilisation des résidus

Dans certain cas, le calcul de la transformée de Fourier de f peut se faire en étendant la fonction $g(t) := f(t) \exp(-2\pi i t \xi)$ dans le plan complexe. La méthode peut se résumer de la façon suivante. Appliquée à g , elle nécessite de choisir judicieusement le contour en fonction du signe de ξ .

Si $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ n'a pas de singularité sur l'axe réel, on peut écrire

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R h(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{\Gamma_R} h(z) dz - \int_{\gamma_R} h(z) dz \right),$$

où Γ_R est le bord d'un demi-disque de rayon R centré en 0 et γ_R est le bord du même demi-disque privé du diamètre $[-R, R]$.

Si

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} h(z) dz = 0$$

et si, de plus, Γ_{R_0} entoure toutes les singularités de h dans le demi-plan qui le contient, alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = \int_{\Gamma_{R_0}} h(z) dz.$$

La dernière intégrale sur Γ_{R_0} se calcule par la méthode des résidus. En principe, il faut vérifier la condition

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} h(z) dz = 0$$

au cas par cas, mais si $|zh(z)| \rightarrow 0$ lorsque $|z| \rightarrow \infty$, alors elle est automatiquement satisfaite. Le rayon R_0 est choisi de telle sorte que toutes les singularités dans le demi-plan (contenant les demi-cercles) sont à l'intérieur du contour Γ_{R_0} .

Si $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a une singularité réelle pure en z_0 , on peut écrire

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \left(\int_{-R}^{z_0-r} h(t) dt + \int_{z_0+r}^R h(t) dt \right).$$

Pour calculer le membre de droite, on considère cette fois le contour $\Gamma_{R,r}$ qui est le demi-cercle γ_R de rayon R centré en z_0 , suivi du segment $[-R, z_0 - r]$, du demi-cercle γ_r de rayon r centré en z_0 et pris dans le sens négatif et du segment $[z_0 + r, R]$. Si $|(z - z_0)h(z)| \rightarrow 0$ lorsque $z \rightarrow z_0$, alors

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_r} h(z) dz = 0,$$

si $|(z - z_0)h(z)| \rightarrow 0$ lorsque $|z - z_0| \rightarrow \infty$,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} h(z) dz = 0$$

et on peut terminer le calcul en utilisant la méthode des résidus.

4.2 Transformée de Laplace

La transformée de Fourier est contenue dans la *transformée de Laplace bilatère*.

Définition 4.2.1. La *transformée de Laplace* de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est la fonction $\mathbb{L}[f] : \text{dom } \mathbb{L}[f] \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\mathbb{L}[f](z) := \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-zt} dt,$$

pour les valeurs de $z \in \mathbb{C}$ où l'intégrale est bien définie.

On voit que $\mathbb{L}[f](2\pi i\xi) = \mathbb{F}[f](\xi)$, où $\xi \in \mathbb{R}$. En particulier, si f admet une transformée de Fourier, l'axe imaginaire pure est dans le domaine de $\mathbb{L}[f]$ mais en général, le domaine de définition de $\mathbb{L}[f]$ n'est pas \mathbb{C} tout entier. C'est le cas de la transformée de l'échelon de Heaviside H défini par $H(t) = 1$ si $t > 0$, $H(t) = 0$ si $t \leq 0$. On observe que $\mathbb{L}[H](z)$ n'est défini que si la partie réelle de z est positive et dans ce cas, $\mathbb{L}[H](z) = 1/z$.

Vocabulaire : on dit que $\mathbb{L}[f]$ est la transformée de f et que f est l'original de $\mathbb{L}[f]$, ce qu'on note parfois $f \sqsupset \mathbb{L}[f]$.

Exemples 4.2.2. 1. La fonction $t \mapsto H(t) \sin t$ a pour transformée $\frac{1}{1+z^2}$ si $\text{Re}(z) > 0$.

2. La fonction $t \mapsto \exp(-|t|)$ a pour transformée la fonction $\frac{2}{1-z^2}$ si $-1 < \text{Re}(z) < 1$.

4.2.1 Propriétés de la transformée de Laplace

Les propriétés suivantes sont utiles dans les applications pratiques mais également pour le calcul de certaines transformées. Les preuves sont exactement les mêmes que pour la transformée de Fourier.

1. Linéarité

La transformée de Laplace est linéaire. Pour rappel, cela signifie que

$$\mathbb{L}[\alpha f + \beta g](z) = \alpha \mathbb{L}[f](z) + \beta \mathbb{L}[g](z),$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et z est dans l'intersection des domaines de $\mathbb{L}[f]$ et $\mathbb{L}[g]$.

2. Formule de changement d'échelle

Si $f_a(t) = f(t/a)$, où $a \neq 0$, alors

$$\mathbb{L}[f_a](z) = |a| \mathbb{L}[f](az).$$

3. Formule du retard

Si $f_{t_0}(t) = f(t - t_0)$, alors

$$\mathbf{L}[f_{t_0}](z) = \exp(-zt_0)\mathbf{L}[f](z).$$

4. Formule de translation en z

Si $f_{z_0}(t) = f(t) \exp(z_0 t)$, alors

$$\mathbf{L}[f](z - z_0) = \mathbf{L}[f_{z_0}](z).$$

5. Formule de la dérivée

Si $\lim_{|t| \rightarrow \infty} f(z) \exp(-zt) = 0$, alors

$$\mathbf{L}[f'](z) = z \mathbf{L}[f](z).$$

Il est intéressant de considérer aussi le cas où f est singulière en un point t_0 . Dans ce cas, sous la même condition, on obtient

$$\mathbf{L}[f'](z) = (f(t_0^-) - f(t_0^+)) \exp(-zt_0) + z \mathbf{L}[f](z).$$

La formule de dérivation est souvent utilisée dans le cas particulier où f est le produit φH et φ est une fonction régulière. Dans ce cas, φH a un saut en $t_0 = 0$ et la formule de dérivation donne

$$\mathbf{L}[H\varphi'](z) = z \mathbf{L}[H\varphi](z) - \varphi(0).$$

6. Dérivée d'une transformée

Si $h(t) = tf(t)$, alors

$$\frac{d\mathbf{L}[f]}{dz}(z) = -\mathbf{L}[h](z).$$

7. Formules des valeurs initiales et finales

Si φ est une fonction régulière, on obtient respectivement les *formules de la valeur initiale et de la valeur finale*

$$\varphi(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} z \mathbf{L}[H\varphi](z)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \lim_{z \rightarrow 0^+} z \mathbf{L}[H\varphi](z).$$

8. Convolution

Si f et g sont des fonctions définies sur \mathbb{R} , on peut définir le **produit de convolution**

$$f \star g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x) dx.$$

On a alors

$$\mathbb{L}[f \star g](z) = \mathbb{L}[f](z)\mathbb{L}[g](z).$$

4.2.2 Utilisation des propriétés pour calculer des transformées ou des originaux

Considérons par exemple la fonction “porte” Π définie précédemment. Comme on peut écrire

$$\Pi(t) = H\left(t + \frac{1}{2}\right) - H\left(t - \frac{1}{2}\right),$$

on voit que

$$\mathbb{L}[\Pi](z) = \frac{\exp\left(\frac{z}{2}\right) - \exp\left(\frac{-z}{2}\right)}{z}.$$

La formule de translation en z montre que si $\operatorname{Re}(z + \alpha) > 0$,

$$\frac{1}{z + \alpha} = \mathbb{L}[H](z + \alpha) = \mathbb{L}[H_{-\alpha}](z),$$

i.e. la fonction $t \mapsto H(t) \exp(-\alpha t)$ est l’originale de $\frac{1}{z + \alpha}$.

Calculons l’original de $1/z^2$. On voit que $1/z^2$ est la dérivée de $-1/z$, i.e.

$$\frac{1}{z^2} = -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{d}{dz}(\mathbb{L}[H])(z)$$

et donc la formule de dérivation de la transformée donne

$$\frac{1}{z^2} \sqsupset t H(t),$$

pour $\operatorname{Re}(z) > 0$. La transformée du produit de convolution donne une autre façon de retrouver l’original de la fonction $1/z^2$. En effet, $1/z^2 = (\mathbb{L}[H](z))^2$ et donc

$$\frac{1}{z^2} \sqsupset H \star H(t) = t H(t).$$

Il existe une formule d’inversion que nous ne donnons pas dans ce cours. Pour retrouver un original, nous utiliserons une table de transformées et les propriétés. Considérons deux exemples typiques.

Si $\phi(z) = \frac{1}{z^2+5z+6}$, on peut écrire

$$\phi(z) = \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3}.$$

La formule de translation en z donne

$$\mathbb{L}[H_{-\alpha}](z) = \frac{1}{z+\alpha},$$

si $\operatorname{Re}(z+\alpha) > 0$. On voit donc que

$$\frac{1}{z+2} = \mathbb{L}[H_{-2}](z)$$

et

$$\frac{1}{z+3} = \mathbb{L}[H_{-3}](z),$$

si bien que l'original de ϕ est la fonction

$$H(t)(\exp(-2t) - \exp(-3t)),$$

pour $\operatorname{Re}(z) > -2$.

Si $\psi(z) = \frac{1}{z^2+a^2}$ où a est un nombre réel positif, on a

$$\frac{1}{s^2+a^2} = \frac{1}{a^2} \frac{1}{\left(\frac{z}{a}\right)^2+1}.$$

Notons $g(t) = H(t) \sin t$. On a vu précédemment que $\mathbb{L}[g](z) = 1/(1+z^2)$.

On a donc

$$\frac{1}{z^2+a^2} = \frac{1}{a^2} \mathbb{L}[g]\left(\frac{z}{a}\right).$$

Utilisons la formule de changement d'échelle. Il vient

$$\frac{1}{z^2+a^2} = \frac{1}{a} \mathbb{L}[g_{1/a}](z)$$

et donc l'original de ψ est la fonction $t \mapsto \frac{1}{a} H(t) \sin(at)$.

Chapitre 5

Applications

5.1 Résolution de l'équation de la chaleur – application des séries de Fourier

La loi de diffusion de la chaleur dans une barre d'épaisseur négligeable mène à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

La fonction $T(x, t)$ donne la température au point x à l'instant t . Si la barre, supposée de longueur π (pour simplifier les calculs) est refroidie à 0 degré à ses extrémités, c'est-à-dire en $x = 0$ et $x = \pi$, nous devons imposer les conditions aux limites $T(0, t) = T(\pi, t) = 0$ à tout instant $t \geq 0$. Nous supposons finalement que la distribution de chaleur dans la barre à l'instant initial $t = 0$ est donnée par la fonction positive $\tau(x)$.

La méthode de séparation des variables consiste à chercher une solution sous la forme $T(x, t) = u(x)v(t)$. La recherche d'une telle solution nous mène à la série

$$T(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} d_k \sin(kx) \exp(-a^2 k^2 t),$$

où les coefficients d_k sont les coefficients de Fourier dans la base 2π -périodique de la fonction τ étendue de façon impaire sur $[-\pi, \pi]$. On observe en particulier que la température diminue au cours du temps et tend uniformément vers la température 0 (température à laquelle sont maintenues les extrémités).

5.2 Formule de D'Alembert pour l'équation des ondes – application de la transformée de Fourier

Notons $u(t, x)$ la position d'une corde horizontale par rapport à sa position d'équilibre. La loi de Hooke mène à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$$

pour décrire l'évolution au cours du temps de la position de la corde. Dans ce contexte, c^2 est le rapport de la tension de la corde au repos et de la masse par unité de longueur.

Cette équation, appelée équation des ondes, apparaît également en électromagnétisme où elle décrit l'évolution du champs électrique et de l'induction magnétique dans le vide. Elle se déduit alors des équations de Maxwell. Le paramètre c est dans ce cas la vitesse de la lumière dans le vide.

L'équation des ondes apparaît aussi dans d'autres champs d'application des mathématiques, notamment dans l'étude des ondes acoustiques ou sismiques.

De manière générale, et quelque soit le contexte (ou presque), le paramètre c joue le rôle de la vitesse de propagation de l'onde considérée.

Il est simple de vérifier que si φ est une fonction deux fois dérivable, alors

$$u(x, t) = \varphi(x + ct)$$

et

$$u(x, t) = \varphi(x - ct)$$

sont des solutions de l'équation. Il s'agit en fait de la même onde qui se déplace à vitesse c en directions opposées. En effet, à chaque instant le profil ϕ est simplement translaté en espace de $\pm ct$.

Ces deux ondes satisfont la condition initiale $u(x, 0) = \varphi(x)$. Si on impose les conditions initiales $u(x, 0) = f(x)$ et $u_t(x, 0) = 0$, alors une solution s'obtient en superposant les ondes $f(x + ct)$ et $f(x - ct)$, c'est-à-dire en prenant

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)).$$

Pour obtenir une solution qui satisfait les conditions initiales $u(x, t) = 0$ et $u_t(x, 0) = g(x)$, on prend

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds.$$

Dès lors une solution de l'équation avec données initiales $u(x, t) = f(x)$ et $u_t(x, 0) = g(x)$ est donnée par la formule suivante, dite de d'Alembert,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds.$$

C'est en fait la seule solution de l'équation qui satisfait ces données initiales.

La transformée de Fourier permet d'obtenir cette formule si f et g sont des fonctions qui décroissent à l'infini. La méthode consiste à prendre la transformée des deux membres de l'équation des ondes. Si \hat{u} désigne la transformée de Fourier de u dans la variable d'espace x , on obtient une équation plus simple pour $v(t) = \hat{u}(\xi, t)$ à ξ fixé. En effet, v satisfait l'équation différentielle ordinaire (l'équation des ondes est, elle, une équation aux dérivées partielles)

$$v''(t) + 4\pi^2 c^2 \xi^2 v(t) = 0.$$

En résolvant cette équation et en utilisant la transformée inverse et les conditions initiales pour u pour déterminer les constantes arbitraires, on obtient la formule de d'Alembert.

5.3 Circuit RC – application de la transformée de Laplace

Dans cette section, nous illustrons le filtrage d'une équation différentielle soumise à des contraintes de sauts. Filtrer une EDO consiste simplement à prendre la transformée de Laplace des deux membres de l'équation et obtenir une formule (la plus explicite possible) pour la transformée de Laplace de la solution recherchée.

Considérons un système RC (résistance-condensateur) dont l'évolution dans le temps est décrite par l'équation

$$Rq'(t) + \frac{q(t)}{C} = e(t), \text{ si } t > 0.$$

La fonction e modélise une impulsion. Elle satisfait $e(t) = 0$ si $t < 0$. Nous cherchons la réponse $q(t)$ du système à cette impulsion. La variation de q , c'est-à-dire q' , correspond à l'intensité instantanée.

Nous cherchons donc une solution continue q de l'équation pour $t > 0$ qui satisfait $q(t) = 0$ si $t < 0$.

En prenant la transformée de Laplace des deux membres de l'équation et en utilisant les propriétés de la transformée, on obtient la relation

$$\mathbb{L}[q](s) = \mathbb{L}[r \star e](s),$$

où

$$r(t) = \frac{1}{R} H(t) \exp(-t/RC).$$

On voit donc que la réponse du système est

$$q(t) = (r \star e)(t),$$

c'est-à-dire qu'elle se calcule à l'aide du produit de convolution de la fonction r qui ne dépend que du système (de R et de C) et de l'impulsion e .

5.4 Résolution de l'équation de Schrödinger de l'atome d'hydrogène – application des fonctions spéciales de la mécanique quantique

L'atome d'hydrogène est le plus simple de tous les atomes du tableau périodique. Dans le cadre de la mécanique quantique, l'étude de l'atome d'hydrogène est un problème à deux corps analytiquement soluble, du moins si l'on se limite au cas non-relativiste d'un hamiltonien dans lequel on considère uniquement l'interaction coulombienne entre le proton et l'électron, supposés ponctuels.

L'atome d'hydrogène est constitué d'un noyau comprenant un seul proton. L'interaction dominante entre le noyau et l'électron est d'origine électrostatique. La force dérive du potentiel

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

où r est la distance du noyau à l'électron et e est la charge élémentaire. La constante ϵ_0 se déduit du rayon de Bohr de l'atome d'hydrogène, à partir de la constante de Planck, de la charge élémentaire et de la masse de l'électron.

L'étude de l'Hamiltonien de ce problème à deux corps quantique mène à l'équation de Schrödinger

$$-\Delta u + V(r)u = Eu,$$

où $u(r, \theta, \varphi)$ est la fonction d'onde (en représentation position et décrite dans les coordonnées sphériques de \mathbb{R}^3), V est le potentiel Coulombien et E est l'énergie de l'atome. Nous avons négligé dans cette équation les valeurs exactes des constantes qui y apparaissent.

La résolution mathématique de cette équation permet de déterminer les états énergétiques possibles de l'atome d'hydrogène. On observe alors une quantification de l'énergie de l'électron qui s'écrit sous la forme

$$E_n = -E_1/n^2,$$

où E_1 est l'énergie d'ionisation de l'atome (calculable à partir de la masse de l'atome, de la charge élémentaire et de la constante de Planck).

Nous ne résolvons pas complètement l'équation dans ces notes. Nous montrons simplement que les fonctions spéciales de la mécanique quantique (voir la section 3.4) apparaissent naturellement dans ce contexte. Nous remarquons aussi que la résolution du problème passe par la recherche de valeurs propres et de fonctions propres d'opérateurs de Sturm-Liouville.

Rappelons que l'opérateur Δ est défini par

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \operatorname{div}(\nabla u)$$

où la divergence de u est définie par

$$\operatorname{div}(u) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

et le gradient de u est défini par

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

En coordonnées sphériques, le laplacien s'écrit

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Si $u(r, \theta, \varphi)$ s'écrit $R(r)T(\theta)F(\varphi)$, alors l'équation devient

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + (E - V)r^2 + \frac{1}{T \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dT}{d\theta} \right) + \frac{1}{F \sin^2 \theta} \frac{d^2 F}{d\varphi^2} = 0$$

Dès lors, on voit successivement qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + (E - V)r^2 = \lambda,$$

$$\frac{1}{T \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dT}{d\theta} \right) + \frac{1}{F \sin^2 \theta} \frac{d^2 F}{d\varphi^2} = -\lambda,$$

et

$$-\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} F = \mu F \quad (5.4.1)$$

$$\frac{-1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{dT}{d\theta} \right) + \frac{\mu}{\sin^2 \theta} T = \lambda T \quad (5.4.2)$$

Comme F est 2π périodique (i.e. $F(-\pi) = F(\pi)$ et $F'(-\pi) = F'(\pi)$), la résolution de (5.4.1) entraîne que $\mu = m^2$ avec $m \in \mathbb{N}$.

Si $T(\theta) = t(\cos \theta)$, l'équation (5.4.2) en t devient

$$(x^2 - 1)t'' + 2xt' + \left(\frac{\mu}{1 - x^2} - \lambda \right) T = 0 \quad (5.4.3)$$

En supposant $\mu = m^2$ et $t(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} g(x)$, on voit que g satisfait

$$(x^2 - 1)g'' + 2(1 + m)xg' - (\lambda - m(m + 1))g = 0 \quad (5.4.4)$$

La résolution de cette équation mène aux polynômes de Legendre. [Bon exercice : résoudre pour $m = 0$ par développement en série en ne gardant que les solutions polynomiales.]

En prenant le potentiel Coulombien $V(r) = -2a/r$, on voit que l'équation pour R s'écrit

$$-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = \left(E + \frac{2a}{r} + \frac{\lambda}{r^2} \right) R.$$

Après quelques manipulations algébriques, on voit que la fonction

$$R(r) = \left(\frac{r}{2\gamma} \right)^k \exp\left(-\frac{r}{4\gamma}\right) h\left(\frac{r}{2\gamma}\right)$$

est une solution si h satisfait l'équation

$$xh'' + (2k + 2 - x)h' - \left(\frac{a}{\gamma} - (k + 1)\right)h = 0,$$

si $\lambda = k(k + 1)$, $k \in \mathbb{N}$ et $E = -\gamma^2$. La résolution de cette équation fait appel aux polynômes de Laguerre.

[Bon exercice : résoudre l'équation

$$xh'' + (1 - x)h' - \mu h = 0$$

en développement en série en ne gardant que les solutions polynomiales.]